Maximale Kantengewichte zusammenhängender Graphen

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik

der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akdemischen Grades

doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von Dipl.-Math. Maria Petzold

geboren am 27. Juni 1985 in Halberstadt

Gutachter Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingo Schiermeyer, Freiberg
Prof. Dr. rer. nat. habil. Margit Voigt, Dresden

Tag der Verleihung: 13.06.2012

Für meinen HERRN, der alles wirkt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einige Menschen erwähnen, die maßgeblichen Anteil am Entstehen der vorliegenden Arbeit hatten.

Zunächst möchte ich mich bei Professor Ingo Schiermeyer bedanken für die Betreuung meiner Arbeit und die vielen fruchtbaren Diskussionen und Korrekturen. Außerdem danke ich Professor Margit Voigt für die Erstellung eines Gutachtens zu dieser Arbeit und den Professoren Stanislav Jendrol und Mirko Hornák für ihre Anregungen zum Thema.

Ein herzlicher Dank gebührt auch allen Mitarbeitern des Instituts für Diskrete Mathematik und Algebra für die freundliche Aufnahme und die angenehme Zusammenarbeit, auch in nichtwissenschaftlichen Belangen.

Ich danke meiner Familie, meinen Freunden, besonders meinem Mann, die mich immer wieder motiviert haben, meine emotionalen Schwankungen ausgehalten haben und immer an meiner Seite standen.

Freiberg, 22.02.2012

Maria Petzold

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Eulerscher Graph, Dir ist stets zu eigen,
daß sich die Knoten grad-geradig zeigen.
Es hat dieser erste Satz
im Buch der Graphen seinen Platz.

Hymne der Graphentheorie (deutsch von A. Pruchnewski)

1 Einführung

Die Hymne der Graphentheorie beschreibt auf humorvolle Weise die „Erfindung“ der Graphentheorie durch Leonard Euler (1707-1783). Die Lösung des als „Königsberger Brückenproblem“ bekannt gewordenen mathematischen Rätsels legte dafür den Grundstein.

Einige Jahre später, im Jahr 1750, reichte er einen Beitrag mit dem Titel „Grundlagen der Lehre von den Körpern“ zu den „Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae“ an der Petersburger Akademie ein, der dann 1758 veröffentlich wurde. Dieser Artikel enthält ein Resultat, das heute als eulerscher Polyedersatz bzw. eulersche Polyederformel bekannt ist. Dieser Satz beschreibt eine der fundamentalen Eigenschaften von beschränkten, konvexen Polyedern. Wenn e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten eines beschränkten, konvexen Polyeders sind, dann gilt:

$$e + f - k = 2.$$

Diese Aussage kann auf die Graphentheorie übetragen werden und stellt dann einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Knoten, Kanten und Gebiete in planaren Graphen dar. Eine interessante und häufig angewandte Folgerung daraus besagt, dass jeder planare Graph einen Knoten mit Knotengrad kleiner oder gleich 5 besitzt ([Kot55]). Eine Reihe von Färbungsresultaten für planare Graphen basieren auf dieser Folgerung.
Ausgehend von dieser Folgerung sind maximale Knotengrade und Knotengradsummen für Kanten in Graphen von einer ganzen Reihe von Forschern untersucht worden (z.B.: A. Kotzig, P. Erdös und S. Jendrol). In Kapitel 3 dieser Arbeit wird ein kurzer Überblick über deren Ergebnisse gegeben.
Für maximale Gewichte von Kanten in Graphen hatte der berühmte ungarische Mathematiker Paul Erdös eine Vermutung aufgestellt, die von S. Jendrol und I. Schiermeyer 2001 vollständig bewiesen wurde. Im zentralen Teil der vorliegenden Arbeit,

in Kapitel 4, wird das speziellere Problem von Kantengewichten in zusammenhängenden Graphen betrachtet. Es werden Teillösungen vorgestellt und weiterführende Lösungsansätze diskutiert.
Kapitel 5 behandelt einige Aspekte einer verallgemeinerten Fragestellung: Gibt es zu jedem Graphen mit Minimalgrad $\delta > 0$ einen zusammenhängenden Graphen mit gleicher Knoten- und Kantenanzahl dessen maximales Kantengewicht nicht kleiner ist?
Abschließend werden noch einige offene Fragen diskutiert.

2 Grundlagen

In der vorliegenden Arbeit werden die folgenden Begriffe und Aussagen als bekannt vorausgesetzt. Sie folgen wenn nicht anders genannt den Definitionen aus dem Lehrbuch von Reinhard Diestel [Die10].

2.1 Begriffe

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq V^2$; die Elemente von E sind also 2-elementige Teilmengen von V. Die Elemente von V nennt man die *Knoten* des Graphen G, die Elemente von E seine *Kanten*.

Sei $G = (A, B)$ ein Graph. Dann bezeichnen wir G als *Graphen auf* A, die Knotenmenge A mit $V(G)$ und die Kantenmenge B mit $E(G)$. G heißt *endlich* bzw. *unendlich*, wenn die Knotenmenge endlich bzw. unendlich ist.
Üblicherweise wird die Anzahl der Knoten mit $n = n(G)$ und die Anzahl der Kanten mit $m = m(G)$ bezeichnet.

Den *leeren Graph* $(\emptyset, \emptyset)$ bezeichnen wir mit $\emptyset$.

Ein Knoten v und eine Kante e *inzidieren* miteinander und heißen *inzident*, wenn $v \in E$ gilt. Die beiden Knoten einer Kante sind ihre *Endknoten* und sie *verbindet* diese Knoten.

Zwei Knoten x, y von G sind *adjazent* oder *benachbart*, wenn $xy \in E(G)$. Zwei Kanten $e \neq f$ heißen *benachbart*, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten haben. Sind je zwei Knoten von G benachbart, dann heißt der Graph G *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf n Knoten bezeichnen wir mit K_n. Einen K_3 bezeichnen wir als *Dreieck*.

Eine Teilmenge von V oder von E, deren Elemente paarweise nicht benachbart sind, heißt *unabhängig*. Eine Menge unabhängiger Kanten in einem Graphen nennt man *Matching*.

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen. Gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein *Teilgraph* von G und G ein *Obergraph* von G'. Der Teilgraph G' heißt *induziert*, wenn er alle Kanten $xy \in E$ mit $x, y \in V'$ enthält. Wir nennen einen solchen Teilgraphen *Untergraph* und bezeichnen G' mit $G[V']$.

Einen vollständigen Teilgraphen nennen wir *Clique*. Für einen Graphen G bezeichnet die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ die Ordnung der größten Clique in G.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V \neq \emptyset$. Die Menge der Nachbarn eines Knotens v bezeichnen wir mit $N_G(v)$ bzw. mit $N(v)$, wenn eindeutig ist, auf welchen Graphen sich die Bezeichnung bezieht. Der *Grad* $d_G(v) = d(v)$ eines Knotens v ist die Anzahl der zu v adjazenten Knoten $|N(v)|$. Ein Knoten mit Grad 0 heißt *isoliert*. I_k bezeichnet den Graphen, der aus k isolierten Knoten besteht: $V(I^k) = \{1, \ldots, k\}; E(I^k) = \emptyset$.

Die Zahl $\delta(G) := \min\{d(v)|v \in V\}$ heißt *Minimalgrad* von G und $\Delta(G) := \max\{d(v)|v \in V\}$ heißt *Maximalgrad* von G. Hat jeder Knoten von G den gleichen Grad k, so heißt G *regulär* oder *k-regulär*.

Ein *Weg* ist ein nicht leerer Graph $P = (V, E)$ der Form

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \; E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots x_{k-1}x_k\},$$

wobei die x_i paarweise verschieden sind. Die *Endknoten von P*, x_0 und x_k, sind durch *P verbunden*. Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine *Länge*; den Weg der Länge k bezeichnen wir mit P_k.

Wenn $x_0 = x_k$, dann heißt der Graph *Kreis* und wird mit C_k bezeichnet.

Ein nicht leerer Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er für je zwei Knoten x, y einen Weg enthält, der x und y verbindet. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen sind seine *Komponenten*.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist $|G| > 1$, so heißt G *k-kantenzusammenhängend*, wenn $G - F$ für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist. Als *Kantenzusammenhangszahl* $\lambda(G)$ *eines Graphen* G bezeichnet man das größte $k \in \mathbb{N}$, sodass G k-fach kantenzusammenhängend ist.

Ein zusammenhängender Graph T mit $|E(T)| = |V(T)| - 1$ heißt *Baum*. Einen Graphen, dessen Komponenten Bäume sind, nennen wir *Wald*.

In einem Graphen $G = (V, E)$ ist $U \subseteq V$ eine Knotenüberdeckung, wenn jede Kante aus E mit einem Knoten aus U inzidiert. Mit $\beta(G) \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Mächtigkeit der kleinstmöglichen Knotenüberdeckung des Graphen G.

Wir bezeichnen einen Graphen $G = (V, E)$ als *r-partit*, wenn sich die Menge V

so in r Teilmengen V_1 bis V_r zerlegen lässt, dass jede Kante $e \in E$ Endknoten in unterschiedlichen Mengen hat. Für $r = 2$ heißt der Graph *bipartit*.
Ein r-partiter Graph, in dem zwei Knoten verbunden sind genau dann wenn sie in verschiedenen Knotenmengen liegen heißt *vollständig r-partit* bzw. für $r = 2$ *vollständig bipartit*. Wir verwenden dafür die Notation $K_{|V_1|,\ldots,|V_r|}$. Der Graph $K_{1,n-1}$ heißt *Stern*.

2.2 Elementare Aussagen

Satz 2.2.1 (Handschlaglemma)**.** *Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Satz 2.2.2 (König, 1931)**.** *Die größte Mächtigkeit eines Matchings in einem bipartiten Graph $G = (V, E)$ ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung von E.*

2.3 Graphenklassen

Wir benötigen die folgenden Graphenklassen:

$\mathcal{C}$ enthält alle zusammenhängenden Graphen,

$\mathcal{C}_1$ enthält alle Bäume,

$\mathcal{C}_k$ enthält alle zusammenhängenden Graphen G mit n Knoten, m Kanten und $n(k-1) - \binom{k}{2} < m \leq nk - \binom{k+1}{2}$ für $k = 2, \ldots, n$.

$\mathcal{D}_{1+}$ enthält alle Graphen mit Minimalgrad größer oder gleich 1.

Dabei gilt:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k.$$

2.4 Graphenoperationen

Wir definieren zwei Operationen auf Graphen. Seien $G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen. Dann gilt:
Wenn

$$G = G_1 \bigoplus G_2,$$

dann ist $V = V_1 \bigcup V_2$ und $E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup \{ab : a \in V_1, b \in V_2\}$.
Wenn

$$G = G_1 - G_2,$$

dann ist $V = V_1 \backslash V_2$ und $E = E_1 \backslash \{ab : a \in V_2 \text{ oder } b \in V_2\}$

3 Gradsummen und Kantengewichte

Professor Paul Erdös stellte 1990 während des vierten tschechoslowakischen Symposiums in Prachatice die folgende Frage:

Frage:
Welches ist das maximale Gewicht einer Kante eines Graphen G mit n Knoten und m Kanten?

Zur Beantwortung dieser Frage definieren wir einige grundlegende Begriffe.

3.1 Kantengewichte

In dieser Arbeit betrachten wir grundsätzlich Graphen ohne Mehrfachkanten und Schlingen.

3.1.1 Definitionen

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$.
Als Gewicht einer Kante $e \in E$ bezeichnen wir die Summe der Grade der Endknoten x und y von e;

$$w(e) := d_G(x) + d_G(y). \tag{3.1}$$

Das Gewicht eines Graphen ist wie folgt definiert

$$w(G) := min\{w(e)|e \in E(G)\}. \tag{3.2}$$

Die Beantwortung von Erdös' Frage entspricht dann der Bestimmung des folgenden Wertes:

$$w(n,m) := max\{w(G) | n = |V(G)|; m = |E(G)|\}.$$

Zusätzlich definieren wir für eine Graphenklasse $\mathcal{P}$ den Wert

$$w(n,m,\mathcal{P}) := max\{w(G) | G \in \mathcal{P}, n = |V(G)|; m = |E(G)|\}.$$

Damit gilt

$$w(n,m,\mathcal{I}) := w(n,m)$$

für die Graphenklasse $\mathcal{I}$, die alle Graphen enthält.

Bemerkung:
Alternativ kann auch ein anderer Gewichtsbegriff definiert werden ([IJ91]):

$$w'(G) := max\{w(e) | e \in E(G)\}.$$

Dann interessiert die Bestimmung des Wertes

$$w'(n,m) := min\{w'(G) | n = |V(G)|; m = |E(G)|\}.$$

In [IJ91] wird dieser Fall untersucht, der jedoch in dieser Arbeit keine Beachtung finden soll.

3.1.2 Der allgemeine Fall

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Graphenklasse $\mathcal{I}$, die alle Graphen enthält. Als erste Aussage dazu wird in [IJ91] der folgende Satz für sehr dichte Graphen formuliert:

Satz 3.1.1 ([IJ91]). *Wenn* $n \in [2, \infty]$, $m = \binom{n}{2} - r$, $0 \leq r < n-1$ *dann gilt:*

1. $w(n,m,\mathcal{I}) = 2n-2$ *für* $r = 0$
2. $w(n,m,\mathcal{I}) = 2n-3$ *für* $r = 1$
3. $w(n,m,\mathcal{I}) = 2n-4$ *für* $2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *oder* $r = 3$
4. $w(n,m,\mathcal{I}) = 2n-5$ *für* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$

5. $w(n, m, \mathcal{I}) = 2n - 6$ *sonst*

Bemerkung:
Dem Beweis wird die folgende Idee zugrunde gelegt:

1. Bestimmung eines Kandidatengraphen aus der jeweiligen Graphenklasse mit einem Gewicht $w(K)$.
2. Beweis, dass es keinen Graphen G aus der Graphenklasse geben kann mit einem Gewicht $w(G) > w(K)$.

Bemerkung:
Die Kandidatengraphen in Satz 3.1.1 haben die folgende Form:

1. vollständiger Graph;
2. ein vollständiger Graph, in dem eine Kante fehlt;
3. ein vollständiger Graph, in dem r unabhängige Kanten oder ein Dreieck fehlen;
4. ein vollständiger Graph, in dem $r-3$ unabhängige Kanten und ein C_3 fehlen oder im Fall $r = 6$ ein K_4 fehlt;
5. ein vollständiger Graph, in dem ein Kreis C_r fehlt.

Die zugehörigen Gewichte können sehr leicht nachgerechnet werden.

Im allgemeinen Fall kann der folgende Satz formuliert werden.

Satz 3.1.2 ([IJ91]). *Sei* $a = \lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8m}) \rceil$ *und* $b = \frac{1}{2}(a^2 - a - 2m)$. *Sei* $h = \lceil \frac{1}{2}(2n - 1 - \sqrt{(2n-1)^2 + 8m}) \rceil$ *und* p, k *ganze Zahlen, so dass* $hk + p = m$, $h + k \leq n$ *und* $h(h-3) < 2p \leq h(h-1)$.
Sei

$$f(n, m) = h + k + \lfloor \frac{2p}{h} \rfloor \tag{3.3}$$

und

$$g(n, m) = \begin{cases} 2a - 2 & \textit{falls } b = 0; \\ 2a - 3 & \textit{falls } b = 1; \\ 2a - 4 & \textit{falls } 2 \leq b \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \textit{ oder } b = 3; \\ 2a - 5 & \textit{falls } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq b \leq \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \textit{ oder } a = 8 \textit{ und } b = 6; \\ 2a - 6 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Dann gilt

$$w(n,m,\mathcal{I}) \leq max\{f(n,m), g(n,m)\}. \tag{3.5}$$

Bemerkung: 1. In [JS01] wird die Gleichheit der obigen Ungleichung bewiesen.

2. In Satz 3.1.2 kommen jeweils zwei Kandidatengraphen in Frage: Für die Funktion $g(n,m)$ ein fast vollständiger Graph (Siehe 3.1.1) mit isolierten Knoten und für $f(n,m)$ ein vollständig bipartiter Graph, zu dem in einer der beiden Knotenmengen Kanten hinzugefügt werden.

3. Für wachsendes n bildet $w(n,m,\mathcal{I})$ eine Sägezahnkurve mit „unregelmäßigen" Sprüngen.

3.1.3 Spezielle Graphenklassen

Für einige spezielle Graphenklassen konnten Resultate oder zumindest Teilresultate erzielt werden. Exemplarisch soll hier ein aktuelles Resultat für die Klasse $\mathcal{B}$ der bipartiten Graphen vorgestellt werden, welches mit Hilfe von zahlentheoretischen Methoden bewiesen werden kann [Hor11].
Dafür definieren wir zwei Kennzahlen:

- $i = \lceil \frac{n-\sqrt{n^2-4m}}{2} \rceil$ und
- $w^* = i + \lceil \frac{m}{i} \rceil - \min(i\lceil \frac{m}{i} \rceil - m; 2)$.

Damit formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 3.1.3. *Sei* $r_0 = \sqrt{n^2-4m}$, $r_1 = \sqrt{(n-1)^2-4m}$ *und* $r_1' = \sqrt{n^2-4m-4}$. *Dann gilt*

1. *Wenn* $r_0 \in \mathbb{Z}$, *dann* $w(n,m,\mathcal{B}) = n$.
2. *Wenn* r_0 *keine ganze Zahl ist, jedoch* r_1 *oder* r_1', *dann* $w(n,m,\mathcal{B}) = n-1$.
3. *Wenn* r_0, r_1 *und* r_1' *keine ganzen Zahlen sind, dann* $w(n,m,\mathcal{B}) = w^*$.

Damit ist die Fragestellung für diese Graphenklasse vollständig gelöst.

3.2 Verallgemeinerung und Alternativen

3.2.1 Gradsummen von Teilgraphen

Die bisher betrachtete Aufgabenstellung der Bestimmung der maximalen Kantengewichte kann verallgemeinert werden, indem auch maximale Gradsummen von Teilgraphen eines Graphen bestimmt werden.
Wir definieren dann:

Definition 3.2.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und H ein Teilgraph von G, dann bezeichnen wir mit*

$$w(H) = \sum_{v \in V(H)} d(v)$$

das Gewicht des Teilgraphen H.
Dabei konnten in [HVJ⁺01] obere Schranken für induzierte Wege und Kreise in zusammenhängenden, klauenfreien Graphen bestimmt werden.
Außerdem bestimmten Enomoto et al. in [EO99] eine obere Schranke für das Gewicht eines induzierten Teilgraphen eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen, die nur von der Knotenanzahl des Teilgraphen abhängt. Auch die Schärfe des Resultats wird gezeigt.
Ein ähnliches Resultat für induzierte Wege in 4-zusammenhängenden planaren Graphen erzielte Mohar in [Moh00].

3.2.2 Alternative Gewichtsbegriffe

In der Literatur sind auch andere Gewichtsbegriffe üblich. Exemplarisch werden wir hier die Definitionen von Tomáš Madaras und verschiedenen Kollegen betrachten ([MvSV07], [MvS07], [MvS04] und [FM10]).
Dazu betrachten wir zusammenhängende Graphen. Sei $\mathcal{H}$ eine Klasse von Graphen und H ein zusammenhängender Graph, dessen Kopie in unendlich vielen Graphen der Klasse $\mathcal{H}$ enthalten ist. Sei jetzt $\varphi(H, \mathcal{H})$ die kleinste ganze Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Für jeden Graph $G \in \mathcal{H}$, der einen Untergraphen K isomorph zu H enthält, gilt für jeden Knoten $v \in V(K)$,

$$d(v) \leq \varphi(H, \mathcal{H}).$$

Wenn keine endliche Zahl $\varphi(H, \mathcal{H})$ existiert, dann schreiben wir $\varphi(H, \mathcal{H}) = +\infty$. Wir bezeichnen einen Graphen H als *leicht* in der Familie $\mathcal{H}$, wenn $\varphi(H, \mathcal{H}) < +\infty$, sonst als *schwer*.

In zahlreichen Publikationen werden verschiedene Graphenklassen untersucht und viele Resultate erzielt. Besonders für die Klasse der planaren Graphen mit festem Minimalgrad werden viele exakte Werte und Schranken für Wege und Sterne bestimmt.

4 Maximale Kantengewichte zusammenhängender Graphen

Im folgenden betrachten wir die Graphenklasse $\mathcal{C}$ der zusammenhängenden Graphen. Weiterhin werden nur schlichte Graphen in die Betrachtungen einbezogen.

4.1 Bekannte Resultate

In [HJS08] ist das in dieser Arbeit betrachtete Problem für große Graphen bereits vollständig gelöst. Die Resultate werden hier im Folgenden vorgestellt. Wir definieren einige Parameter

$$\binom{n}{2} - \binom{k+1}{2} < m \leq \binom{n}{2} - \binom{k}{2}, \tag{4.1}$$

$$m' := \binom{n}{2} - \binom{k}{2} - m \in [0, k-1], \tag{4.2}$$

$$0 \leq r := \lceil \frac{m'}{n-k} \rceil \leq \lceil \frac{k-1}{n-k} \rceil \leq \frac{n-2}{n-k}, \tag{4.3}$$

$$c := \begin{cases} 1 & , m' \in [0, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor] \bigcup \{(n-k-1)^2\} \\ 2 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{4.4}$$

Satz 4.1.1 ([HJS08])**.** *Angenommen $n \in [4, \infty), m \in [n-1, \binom{n}{2}]$, k, m', r und c wie in (4.1)-(4.4) definiert, $k \geq \frac{n}{2}$ und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}_{1+}$. Wenn entweder $m' \in [0, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor]$ oder $n \geq 49$, dann gilt $w(n, m, \mathcal{P}) = 2n - k - r - c$.*

Für sehr dichte Graphen gelten die folgenden Aussagen. Wir definieren

$$d := \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor \leq n-1, \tag{4.5}$$

$$e := \begin{cases} 0 & , m = \binom{n}{2} - 1 \\ 0 & , d \leq n-3 \wedge (\exists q \in [0, d-1] : 2m \equiv q (mod\ n)) \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Satz 4.1.2 ([HJS08])**.** *Wenn* $n \in [15, \infty), m \in [\binom{n}{2} - \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} + 1, \binom{n}{2}], d, e$ *definiert durch 4.5 und 4.6 und* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}_{1+}$*, dann gilt* $w(n, m, \mathcal{P}) = 2d + e$*.*

Die Beweise dieser beiden Sätze werden sehr ähnlich geführt und basieren auf dem folgenden Satz.

Satz 4.1.3 ([HJS08])**.** *Sei* $n \in [2, \infty), m \in [1, \binom{n}{2}], \mathcal{P}_1, \mathcal{P}, \mathcal{P}_2$ *Graphenklassen mit* $\emptyset \neq \mathcal{P}_1(n, m) \subseteq \mathcal{P}(n, m) \subseteq \mathcal{P}_2(n, m)$ *und* $w(n, m, \mathcal{P}_1) \geq w(n, m, \mathcal{P}_2)$*, dann gilt* $w(n, m, \mathcal{P}_1) = w(n, m, \mathcal{P}) = w(n, m, \mathcal{P}_2)$*.*

Hier werden speziell die Graphenklassen

$\mathcal{P}_1$	$= \mathcal{C}$	zusammenhängende Graphen
$\mathcal{P}_2$	$= \mathcal{D}_{1+}$	Graphen mit Minimalgrad größer 1

für den Beweis herangezogen.
Dabei wird jeweils ein Kandidatengraph konstruiert und dann mit dem Handschlaglemma ein Widerspruch zu einem höheren Gewicht gezeigt.

Die beiden oben aufgeführten Resultate lösen das Problem für große Graphen. Für kleinere Graphen ist das Verhalten damit nicht geklärt. In den nächsten Abschnitten werden Ansätze aufgezeigt die oben aufgezeigte Lücke zu schließen. Dabei betrachten wir zunächst Graphen mit wenigen Kanten.

4.2 Maximale Kantengewichte von Bäumen

Wir betrachten die Graphenklasse $\mathcal{T} = \mathcal{C}_1 = \{G = (V, E) : |V| = n, |E| = n - 1\}$ der Bäume.
Es gilt:

Satz 4.2.1. *Für die Klasse* $\mathcal{T}$ *gilt:*

$$w(n, n-1, \mathcal{T}) = n.$$

Beweis:
Der Stern $K_{1,n-1}$ hat $n-1$ Kanten und gehört in die Klasse $\mathcal{T}$ und hat das Gewicht n. Also gilt $w(n, n-1, \mathcal{T}) \geq n$.
Angenommen es existiert ein Graph $T \in \mathcal{T}$ mit $w(T) > n$. Dann existiert zu allen Kanten $e = (u, v) \in E$ ein Knoten p mit $(u, p), (v, p) \in V$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Kreisfreiheit von T.
Also gilt auch $w(n, n-1, \mathcal{T}) \leq n$ und damit die obige Aussage. $\square$

Bemerkung:
Wir können die Aussage aus Satz 4.2.1 auf Wälder erweitern:

Satz 4.2.2. *Für die Graphenklasse $\mathcal{F}$ der Wälder mit $k = n-m$ Komponenten gilt:*

$$w(n, m, \mathcal{F}) = n - k + 1.$$

Beweis:
Wir können einen Graphen mit dem Gewicht $n-k+1$ konstruieren, indem wir $k-1$ Komponenten aus isolierten Knoten bilden und aus m Kanten und $n-k+1 = m+1$ Knoten einen Stern als letzte Komponente bilden. Also gilt $w(n, n-1, \mathcal{F}) \geq n-k+1$.
Angenommen es gibt einen Graphen $F \in \mathcal{F}$ mit $w(F) > n-k+1$. Nach Satz 4.2.1 gilt $w(F) \leq n^*$, wobei n^* die Knotenanzahl der kleinsten Komponente von F mit echt positiver Kantenanzahl ist. Also gilt $n - k + 1 < n^*$. Da jede Komponente mindestens einen Knoten enthalten muss, gilt jedoch auch $n^* \leq n - k + 1$, ein Widerspruch.
Also gilt $w(n, n-1, \mathcal{F}) \leq n - k + 1$ und damit die Aussage. $\square$

4.3 Maximale Kantengewichte von Graphen aus der Klasse $\mathcal{C}_2$

Wir betrachten in diesem Abschnitt zusammenhängende Graphen mit $n - 1 < m \leq 2n - 3$. Der Wert für $w(n, m)$ wird in zwei Schritten ermittelt:

1. Konstruktion eines Kandidaten $K(n, m)$ und
2. Beweis, dass für alle Graphen $G \in \mathcal{C}_2$ mit n Knoten und m Kanten gilt: $w(K(n, m)) \geq w(G)$.

Tabelle 4.1: Kandidatengewicht

r	$w(K(n,m))$, für n ungerade	$w(K(n,m))$, für n gerade
0	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+2}{2}$
1	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+4}{2}$
2	$\frac{n+5}{2}$	$\frac{n+4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-7$	$n-2$	$n-2$
$n-6$	$n-2$	$n-2$
$n-5$	$n-1$	$n-1$
$n-4$	n	n
$n-3$	$n+1$	$n+1$

Der Kandidat K(n,m)

Wir konstruieren einen zusammenhängenden Kandidatengraphen $K(n,m)$ mit n Knoten und m Kanten wie im Folgenden beschrieben. Wir vermuten, dass dieser Kandidat das optimale, also maximale Gewicht annimmt.

Konstruktion:
Der Kandidat enthält eine ausgezeichnete Kante und eine Menge mit $n-2$ unabhängigen Knoten, die gleichmäßig mit den Endknoten der ausgezeichneten Kante verbunden sind.

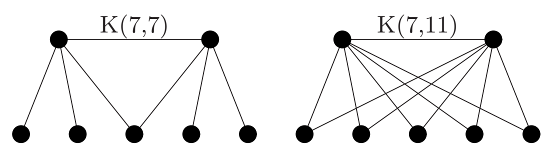

Abbildung 4.1: Beispiel für Kandidaten $K(7,7)$ und $K(7,11)$.

Eigenschaften des Kandidaten K(n,m)

Wir definieren $r := m - n$. Der Kandidat $K(n,m)$ hat folgende Eigenschaften:

1. $K(n,m) \in \mathcal{C}_2$,
2. In Abhängigkeit der Parität von n und der Kantenzahl $m = n + r$ können wir das Gewicht des Kandidaten $K(n,m)$ berechnen (Tabelle 4.1):

3. Damit kann das Gewicht des Kandidaten $w(K(n,m))$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$w(K(n,m)) \geq \begin{cases} \frac{n+3}{2} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, & \text{für } n \text{ ungerade;} \\ \frac{n+2}{2} + \lceil \frac{r}{2} \rceil, & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \geq \frac{n+r+2}{2} =: w^*, \qquad (4.7)$$

Satz 4.3.1. *Sei $G \in \mathcal{C}_2$ ein Graph mit n Knoten und $m := n+r$ Kanten. Dann gilt*

$$w(K(n,m)) \geq w(G).$$

Beweis:
Angenommen es existiert ein Graph G^* mit einem Gewicht $w(G^*) > w^*$.
Wir unterteilen die Knotenmenge V_{G^*} von G^* in zwei Teilmengen:
$R = \{v \in V_{G^*} | d(v) \leq \frac{w^*}{2}\}$ und $T = V_{G^*} - R = \{v \in V | d(v) \geq \frac{w^*+1}{2}\}$.

Wegen des vorausgesetzten Gewichts $w(G^*) > w^*$ gilt dann:

- R ist knotenunabhängig und
- es können in G^* nur zwei Arten von Kanten existieren:
    1. Kanten (u,v) mit $u, v \in T$ und
    2. Kanten (u,v) mit $u \in R$ und $v \in T$.

Es sei $t = |T|$. Dann können wir die Gradsumme von G^* wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} 2(n+r) &= 2m \\ &= \sum_{v \in V_{G^*}} d(v) \\ &\geq \underbrace{t\frac{w^*+1}{2}}_{v \in T} + \underbrace{n-t}_{v \in R} \\ &= n + t\frac{w^*-1}{2} \\ &= n + t\frac{n+r}{4} \\ &\overset{\text{für } t \geq 6}{\geq} n + \frac{6(n+r)}{4} \\ &= \frac{5n+3r}{2} \\ &\overset{\text{da } n>r}{>} 2(n+r). \end{aligned}$$

Der Widerspruch zum Handschlaglemma entsteht für $t \geq 6$. Daher genügt es $2 \leq t \leq 5$ zu betrachten. Kleinere Werte für t müssen nicht betrachtet werden, da damit keine Graphen der Klasse $\mathcal{C}_2$ konstruiert werden können.

Bemerkung:
Wir sagen ein Graph G erfüllt die T-Bedingung, wenn für alle Knoten v aus T gilt $d(v) \geq \frac{w^*+1}{2}$, wenn er also der oben beschriebenen Konstruktion entspricht.
Damit muss der Graph G^* der T-Bedingung genügen.

Wir führen eine Fallunterscheidung nach der Größe von $t = |T|$ durch. Dabei werden uns die Werte in Tabelle 4.2 eine Hilfe sein.

t=3

Wir können hier nun anhand der auftretenden Knotengrade in der Menge R eine weitere Fallunterscheidung durchführen. Die drei Fälle überschneiden sich teilweise, aber sie decken alle auftretenden Fälle ab.

<u>Fall 1: $\forall v \in R : d(v) = 3$</u>

Alle Knoten in R haben den größtmöglichen Knotengrad und damit kann die Kantenanzahl wie folgt abgeschätzt werden:

$$m \geq 3(n-3)$$

Dies führt für $n > 6$ zu einem Widerspruch zur Voraussetzung $m \leq 2n-3$. Wir betrachten also nur Graphen mit weniger als sieben Knoten und können damit die Untersuchungen auf die Fälle 1-9 der Tabelle 4.2 beschränken.
Die Gradsumme können wir mit Hilfe der folgenden Formel berechnen:

$$\sum_{v \in V_{G^*}} d(v) \geq 3 \left\lceil \frac{w^*+1}{2} \right\rceil + (n-3) \cdot 3.$$

Die Werte aus Tabelle 4.2 ergeben aber in allen Fällen

$$2m < \sum_{v \in V_{G^*}} d(v).$$

Tabelle 4.2: Übersicht über die auftretenden Graphen

	n	r	m	$\lceil w^* \rceil$	$\lceil \frac{w^*+1}{2} \rceil$		n	r	m	$\lceil w^* \rceil$	$\lceil \frac{w^*+1}{2} \rceil$
1	4	0	4	4	3	28	10	0	10	6	4
2	4	1	5	5	3	29	10	1	11	7	4
3	5	0	5	4	3	30	10	2	12	7	4
4	5	1	6	5	3	31	10	3	13	8	5
5	5	2	7	5	3	32	10	4	14	8	5
6	6	0	6	4	3	33	10	5	15	9	5
7	6	1	7	5	3	34	10	6	16	10	6
8	6	2	8	6	4	35	11	0	11	7	4
9	6	3	9	7	4	36	11	1	12	7	4
10	7	0	7	5	3	37	11	2	13	8	5
11	7	1	8	5	3	38	11	3	14	8	5
12	7	2	9	6	4	39	11	4	15	9	5
13	7	3	10	7	4	40	11	5	16	9	5
14	7	4	11	8	5	41	12	0	12	7	4
15	8	0	8	5	3	42	12	1	13	8	5
16	8	1	9	6	4	43	12	2	14	8	5
17	8	2	10	6	4	44	12	3	15	9	5
18	8	3	11	7	4	45	12	4	16	9	5
19	8	4	12	8	5	46	13	0	13	8	5
20	8	5	13	9	5	47	13	1	14	8	5
21	9	0	9	6	4	48	13	2	15	9	5
22	9	1	10	6	4	49	13	3	16	9	5
23	9	2	11	7	4	50	14	0	14	8	5
24	9	3	12	7	4	51	14	1	15	9	5
25	9	4	13	8	5	52	14	2	16	9	5
26	9	5	14	9	5	53	15	0	15	9	5
27	9	6	15	10	6	54	15	1	16	9	5
						55	16	0	16	9	5

Das führt zu einem Widerspruch zum Handschlaglemma.

Fall 2: $\exists v \in R : d(v) = 2$

Wir können die Grade der Knoten abschätzen. Zwischen Knoten aus T können höchsten 3 Kanten existieren, daher haben mindestens $n + r - 3$ Knoten einen Endpunkt in der Knotenteilmenge R. Mit dem Knoten v mit $d(v) = 2$ sind dann zwei der Knoten in T verbunden. Diese zwei Knoten müssen einen Grad von mindestens $(w^* + 1) - 2$ haben. Der dritte Knoten in T braucht einen Grad von mindestens $(w^* + 1) - 3$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} d(v) &\geq (n + r - 3) + 2\frac{n + r}{2} + \frac{n + r - 2}{2}\\ &= \frac{5n + 5r - 8}{2}\\ &> 2m\\ \Leftrightarrow n + r - 8 > 0\end{aligned}$$

Wir müssen also nur Graphen mit $n+r \leq 8$ betrachten. Das entspricht den Nummern 1-8,10,11,15 in Tabelle 4.2. Die zu betrachtenden Graphen haben in T einen Grad von mindestens drei (siehe Daten in Tabelle 4.2) und in R einen Grad von mindestens eins bzw. an einem Knoten einen Grad von 2.

$$2m = \sum d(v) \geq 3\frac{w^* + 1}{2} + n - 4 + 2 \geq n + 7 > 2m \Leftrightarrow m < \frac{n + 7}{2}$$

Wegen des Handschlaglemma, betrachten wir nur die Fälle mit $m \geq \frac{n+7}{2}$, damit entfallen die Fälle 1,2,3,6. In den übrigen Fällen berechnen wir die Mindestgradsumme

$$MGS := 3\frac{w + 1}{2} + n - 2$$

und die Differenz $2m - MGS$ und betrachten alle Möglichkeiten die fehlenden Gradpunkte auf die Knoten zu verteilen. Doch in keinem der Fälle kann das Gewicht über w steigen.

Fall 3: $\exists v \in R : d(v) = 1$

Analog zum Fall 2 führen die Überlegungen zu dem Schluss, dass kein Graph mit höherem Gewicht als w^* konstruiert werden kann.

t=4

Analog zum Fall $t = 3$ führen wir eine Fallunterscheidung nach den auftretenden Graden in der Menge R durch.

$\underline{\forall v \in R : d(v) = 4}$

Es gilt:

$$m = n + r \geq 4(n-4) \Rightarrow 2n - 3 \geq 4n - 16 \Rightarrow 6 \geq n.$$

Das entspricht den Fällen $3 - 9$ aus der Tabelle 4.2.
Damit die T-Bedingung erfüllt werden kann, muss gelten:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) \geq 4\frac{w^*+1}{2} + 4(n-4).$$

Das gilt jedoch für keinen der sieben Fälle und damit ist kein zulässiger Graph konstruierbar.

$\underline{\exists v \in R : d(v) = 3}$

Es gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq n + r - 4 + 2 + 3\frac{n+r-4}{2} + \frac{n+r}{2} = 3m - 8 > 2m \Leftrightarrow m > 8.$$

Wir betrachten also nur Fälle mit $m \leq 8$. Wir können die Abschätzung präzisieren:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) \geq 4\frac{w^*+1}{2} + n - 5 + 2$$

Es gibt keinen Graphen unter den zu untersuchenden Fällen, der diese Bedingung erfüllt.

$\exists v \in R : d(v) = 2$

Es gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq n + r - 4 + 1 + 2\frac{n+r-2}{2} + 2\frac{n+r}{2} = 3m - 5 > 2m \Leftrightarrow m > 5.$$

Es bleibt also nur der Fall 3 übrig und der scheidet wegen zu hoher Mindestgradsumme aus.

$\exists v \in R : d(v) = 1$

Es gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq n + r - 4 + 4\frac{n+r}{2} = 3m - 4 > 2m \Leftrightarrow m > 4.$$

Unter dieser Bedingung bleibt kein Graph mehr zur Betrachtung übrig.

t=5

Wir können die Gradsumme eines Graphen mit $t = 5$ wie folgt abschätzen:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq n + r - 10 + 5\frac{n+r-6}{2}.$$

Diese Abschätzung verletzt das Handschlaglemma genau dann, wenn $n + r > \frac{50}{3}$. Wir betrachten also alle Fälle mit $n + r \leq 16$. Das entspricht den Fällen $6 - 55$ aus der Tabelle 4.2. Weiter können wir die Mindestgradsumme MGS berechnen mit:

$$MGS := 5\frac{w^* + 1}{2} + n - 5.$$

Wenn die Differenz $2m - MGS$ negativ wird, ist wegen des Handschalglemmas keine Konstruktion unter Erfüllung der T-Bedingung möglich. Das ist bei allen Fällen außer $24, 33, 40$ und 45 der Fall. In diesen Fällen kann gezeigt werden, dass kein zulässiger Graph ein höheres Gewicht als w^* hat. Dazu betrachten wir die Differenz $MGS - 2m$ (entspricht den zusätzlich zu verteilenden Gradpunkten) und alle Möglichkeiten, diese auf die Knoten zu verteilen.

t=2

In diesem letzten Fall verfolgen wir eine etwas abweichende Strategie:
Angenommen, G^* habe ein Gewicht $w(G^*) > w(K(n,m))$ (Siehe Formel 4.7). Die Menge T enthält zwei Knoten. Da jede Kante mindestens einen Endpunkt in T hat, können wir das Gewicht von G^* nach oben beschränken:

$$w(G^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + 2.$$

In einem ersten Schritt nehmen wir an, dass $w(G^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$ gilt. Wir unterscheiden wiederum verschiedene Fälle:

Fall 1: n gerade
Laut Formel 4.7 gilt:

$$w(K(n,m)) \geq \frac{n+2}{2} + \lceil \frac{r}{2} \rceil.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} w(G^*) &\leq \lceil \frac{n+r}{2} \rceil + 1 \\ &= \lceil \frac{r}{2} \rceil + \frac{n+2}{2} \\ &\leq w(K(n,m)) \end{aligned}$$

und damit der Widerspruch zur Annahme $w(K(n,m)) < w(G^*)$.

Fall 2: n ungerade
Laut Formel 4.7 gilt:

$$w(K(n,m)) \geq \frac{n+3}{2} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor.$$

Wenn r gerade ist, dann gilt die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} w(K(n,m)) &\geq \frac{n+3}{2} + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \\ &= \frac{n+r+3}{2} \\ &= \lceil \frac{n+r+2}{2} \rceil \\ &\geq w(G^*). \end{aligned}$$

Wenn r ungerade ist, dann gilt $w(G^*) \leq \frac{n+r}{2}+1$ und damit die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} w(K(n,m)) &\geq \frac{n+3}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{n+r+2}{2} \\ &\geq w(G^*). \end{aligned}$$

In beiden Fällen widerspricht die Abschätzung der Annahme $w(K(n,m)) < w(G^*)$.

Damit bleibt noch der Fall $w(G^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + 2$ zu untersuchen. Wir konstruieren einen Graphen, der diese Bedingung erfüllt. Wenn $T = \{u, v\}$, dann gilt o.B.d.A. $\lceil \frac{m}{2} \rceil = d(u) \leq d(v)$. Allerdings gilt dann auch $d(v) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$. Dies ist nur möglich, wenn $(u,v) \in E(G^*)$ und $\forall x \in V(G^*) : d(x) = 2$. Damit muss $G^* = K(n,m)$ gelten und damit der Widerspruch zur Annahme. $\square$

4.4 Maximale Kantengewichte von Graphen der Klasse $\mathcal{C}_3$

Wir betrachten in diesem Abschnitt zusammenhängende Graphen mit $2n-3 < m \leq 3n-6$.
Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$G \in \mathcal{C}_3 \leftrightarrow 2n(G) - 3 < m(G) \leq 3n(G) - 6.$$

Es liegt nahe zu vermuten, dass die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels sich auf Graphen $G \in \mathcal{C}_3$ übertragen lassen.
Zu einer analogen Aussage gibt es in jedem Fall drei Ausnahmegraphen E_1 bis E_3, die ein höheres Gewicht annehmen als der jeweilige Kandidatengraph.

Der Kandidat K(n,m)

Analog zum vorherigen Kapitel konstruieren wir einen Kandidatengraphen $K = K(n,m)$ nach der folgenden Konstruktionsvorschrift:

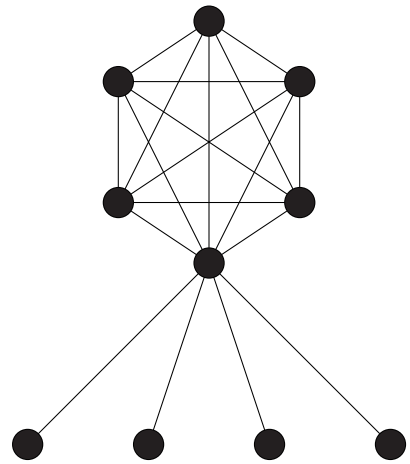

Abbildung 4.2: Ausnahmegraph E_1

Wir konstruieren einen zusammenhängenden Kandidatengraphen $K = K(n, m)$ mit n Knoten und m Kanten wie im Folgenden beschrieben. Wir vermuten, dass dieser Kandidat das optimale, also maximale Gewicht annimmt.

Konstruktion:
Der Kandidat enthält einen K_3 und eine Menge mit $n - 3$ unabhängigen Knoten, die gleichmäßig mit den Endknoten des K_3 verbunden sind (Abbildung 4.5). Für die exakte Konstruktion siehe Kapitel 4.5.

Satz 4.4.1. *Für Graphen $G \in \mathcal{C}_3$ und $n \leq 48$ gilt:*

$$w(n, m, \mathcal{C}_3) = w(K),$$

außer in den oben aufgeführten drei Ausnahmefällen.

Für den Beweis von Satz 4.4.1 benötigen wir die folgende Aussage (ohne Beweis):

Lemma:
Für einen zusammenhängenden und bipartiten Graphen $G = (A \cup B; E)$ gilt

$$\beta(G) \geq 2 \tag{4.8}$$

wenn $\mid A \mid \geq 2$ und $\mid B \mid \geq 2$.

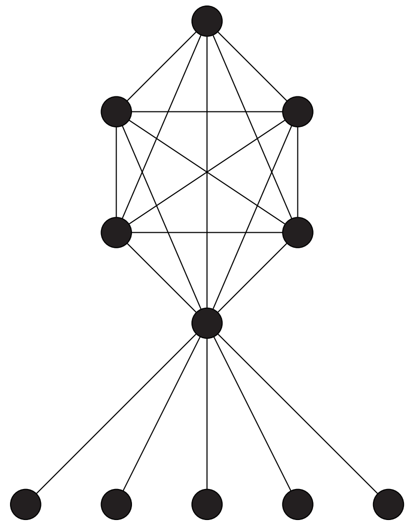

Abbildung 4.3: Ausnahmegraph E_2

Beweis:
Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen es gibt einen Graphen G^* mit

$$w(K) < w(G^*).$$

Wir definieren den Parameter w^* als untere Schranke für das Gewicht des Kandidatengraphen K:

$$\begin{aligned} w(K) &\geq \lfloor\frac{m-3}{3}\rfloor + 2 + \lfloor\frac{m-3}{n-3}\rfloor \\ &\geq \frac{m-3}{3} + \frac{m-3}{n-3} \\ &= \frac{(m-3)(n-3)+3(m-3)}{3(n-3)} \\ &= \frac{mn-3n}{3n-9} =: w^*. \end{aligned}$$

Analog zur Argumentation im vorhergehenden Abschnitt können wir die Knoten von G^* zwei Mengen T und R zuordnen, wobei gilt:

$R = \{v \in V_{G^*} | d(v) \leq \frac{w^*}{2}\}$ und $T = V_{G^*} - R = \{v \in V | d(v) \geq \frac{w^*+1}{2}\}$.

Wegen des vorausgesetzten Gewichts $w(G^*) > w^*$ gilt dann:

- R ist knotenunabhängig und

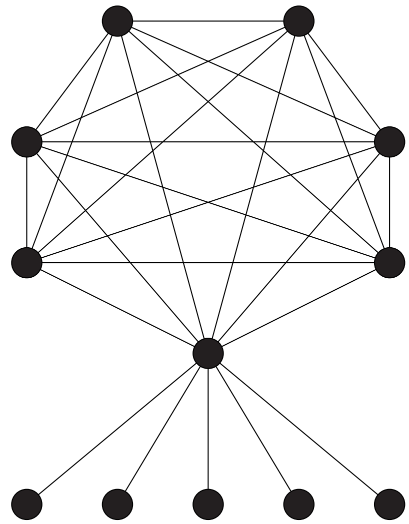

Abbildung 4.4: Ausnahmegraph E_3

- es können in G^* nur zwei Arten von Kanten existieren:
    1. Kanten (u, v) mit $u, v \in T$ und
    2. Kanten (u, v) mit $u \in R$ und $v \in T$.

Um die Kardinalität der Menge T einschränken zu können, definieren wir:

$$w(K) \geq \frac{m+6}{3} =: w'.$$

Damit können wir die Gradsumme von G^* wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
2(n+r) &= 2m \\
&= \sum_{v \in V_{G^*}} d(v) \\
&= t\frac{w'+1}{2} + n - t \\
&= t\frac{m+9}{6} + n - t \\
&> 2m.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt nur für $t > 9$.

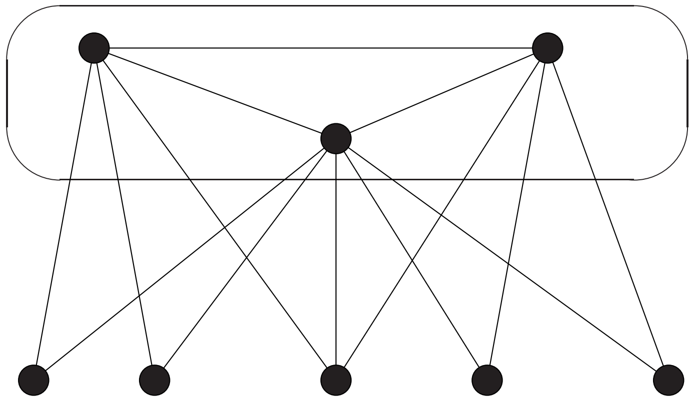

Abbildung 4.5: Beispielkandidat für $\mathcal{C}_3$

Wir betrachten also nur Graphen mit $t \leq 9$. Alle in Frage kommenden Kombination von n, m und t sind in der Tabelle im Anhang A.1 aufgeführt. Für jeden der Fälle betrachten wir die folgenden Parameter:

$$\sum_{v \in V_{G^*}} d(v) \geq \frac{tmn + 9t + 6n^2 - 6nt - 18n}{6n - 18} =: D.$$

Der Parameter D bezeichnet dann die Mindestgradsumme, die durch die oben beschriebene Konstruktion schon festgelegt ist.

$$2m - D =: A$$

bezeichnet dann die Differenz von den schon fest vergebenen Graden zur Gesamtgradsumme.
Außerdem bezeichnet

$$B := w(K) + 1 - (\frac{w(K) + 1}{2} + 1)$$

die Differenz des durch die Mindestgrade realisierten Gewichts $\frac{w(K)+1}{2} + 1$ und dem angenommenen Gewicht des Graphen G^*.

Wir eliminieren nacheinander an Hand der Daten aus der Tabelle alle Fälle nach folgenden Kriterien:

1. $A < 0$, das heißt, dass die Anzahl der Kanten nicht ausreicht, um die nötigen

Mindestgrade zu realisieren;

2. $B > D$, das heißt, dass die Anzahl der frei verfügbaren Grade nicht ausreicht, um ein Gewicht größer w^* an einer Kante zu realisieren;

3. $2B > D$, das heißt, dass die Anzahl der frei verfügbaren Grade nicht ausreicht, um ein Gewicht größer w^* an zwei Kanten zu realisieren.

Nach Anwendung dieser Kriterien bleiben keine Fälle mehr übrig.
Allerdings ist Fall 3 in dieser Aufzählung wegen Lemma 4.4 nur dann ein Ausschlusskriterium, wenn in R mindestens zwei Knoten liegen und mindestens zwei Knoten aus T mit Knoten aus R verbunden sind.
In R kann nicht nur ein Knoten liegen, da G^* dann zu viele Kanten besitzt. Also bleibt der Sonderfall zu betrachten, dass nur genau ein Knoten aus T mit allen Knoten aus R verbunden ist.
Der Vergleich mit den Gewichten der Kandidatengraphen zeigt, dass nur die drei oben aufgeführten Ausnahmegraphen E_1, E_2 und E_3 ein echt höheres Gewicht annehmen. □

4.5 Verallgemeinerung der Vorgehensweise

Analog zur Vorgehensweise in den vorangegangenen Abschnitten konstruieren wir auch im allgemeinen Fall einen Kandidaten $K(n, m)$. Die Konstruktion wird bestimmt von einem kantenzahlabhängigen Parameter k mit:

$$(k-1)n - \binom{k}{2} < m \leq kn - \binom{k+1}{2}.$$

Mit $\mathcal{C}_k$ bezeichnen wir die Klasse der zusammenhängenden Graphen, deren Kanten- und Knotenanzahl der obigen Ungleichung genügen.

$K(n, m)$ besteht aus einem K_k und $n - k$ unabhängigen Knoten, die gleichmäßig mit den anderen k Knoten verbunden sind.

Exakte Konstruktion: Wir bezeichnen die k Knoten des K_k mit $v_1, \ldots, v_k$. Die $n-k$ unabhängigen Knoten werden gleichmäßig k Knotenmengen $V_1, \ldots, V_k$ zugeordnet, so dass jede dieser Mengen entweder $\lfloor \frac{n-k}{k} \rfloor$ oder $\lceil \frac{n-k}{k} \rceil$ Knoten enthält, wobei die

Mengen mit der geringeren Kardinalität die kleineren Ordnungszahlen bekommen. Dann fügen wir Kanten (u, v_i) ein, wobei $u \neq v_j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, und

$$i \neq l, \text{ wenn } u \in V_l.$$

Die nun noch fehlenden Kanten werden nach folgendem Muster eingefügt: Beginnend bei V_1 wird sukzessive ein Knoten der jeweiligen Menge V_i mit dem Knoten v_i verbunden, bis die gewünschte Kantenzahl erreicht ist.

Vermutung:
Gegeben sei ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten und m Kanten. Dann gilt bis auf eine endliche Menge von $n, m-$ Kombinationen

$$w(G) \leq w(K(n, m)).$$

Allgemein können wir den folgenden Satz formulieren

Satz 4.5.1. *Sei k die natürliche Zahl mit $(k-1)n - \binom{k}{2} < m \leq kn - \binom{k+1}{2}$. Dann gilt*

$$w(\mathcal{C}_k) \geq w(K(n, m)).$$

4.6 Dichte Graphen

Im folgenden Abschnitt betrachten wir die maximalen Kantengewichte eines Sonderfalls, sehr dichte Graphen.

4.6.1 Bekanntes Resultat

In [HJS08] ist dieser Sonderfall fast vollständig gelöst.
Wir definieren zwei Parameter d und e, wie folgt:

$$d := \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor \leq n - 1 \tag{4.9}$$

$$e := \begin{cases} 0 & , m = \binom{n}{n} - 1 \\ 0 & , d \leq n - 3 \wedge (\exists q \in [0, d-1] : 2m \equiv q(mod\ n)) \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Damit können wir die folgende Aussage beweisen:

Satz 4.6.1 ([HJS08]). *Für $n \in [15, \infty); m \in [\binom{n}{2} - \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} + 1, \binom{n}{2}]$; die durch 4.9 und 4.10 definierten Parameter d, e und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}_{1+}$ gilt $w(n, m, \mathcal{P}) = 2d + e$.*

4.6.2 Vervollständigung des Resultats

Wir können die bestehende Lücke für kleine Graphen mit weniger als 15 Knoten schließen:

Für die meisten dieser Fälle können wir den folgenden Satz aus [JS01] anwenden.

Satz 4.6.2. *Wenn $m = \binom{n}{2} - r$, $0 \leq r < n - 1$ dann gilt:*

1. $W(n, m, \mathcal{G}) = 2n - 2$ *für* $r = 0$;
2. $W(n, m, \mathcal{G}) = 2n - 3$ *für* $r = 1$;
3. $W(n, m, \mathcal{G}) = 2n - 4$ *für* $2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *oder* $r = 3$;
4. $W(n, m, \mathcal{G}) = 2n - 5$ *für* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$;
5. $W(n, m, \mathcal{G}) = 2n - 6$ *sonst.*

Außerdem gilt:

Bemerkung:
Ein vollständiger Graph, aus dem weniger als $n - 1$ Kanten entfernt werden, bleibt zusammenhängend, weil er die Kantenzusammenhangszahl $n - 1$ hat [Tit03].

Wir können also garantieren, dass der Kandidat aus Satz 4.6.2 zusammenhängend ist und damit das maximale Kantengewicht für unseren Fall liefert.
Das bedeutet, dass nur die 29 Fälle einzeln untersucht werden müssen, die von Satz 4.6.2 nicht abgedeckt werden, für die also die folgenden Bedingungen gelten:

1. $n \leq 14$
2. $\binom{n}{2} - \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} + 1 \leq m \leq m - n + 1$

Die Vorgehensweise

Die Vorgehensweise im Fall mit der Nummer i ist immer die gleiche:

1. Ermitteln eines Kandidaten K^i
2. Beweis, dass der Kandidat der beste ist:

Die Kandidaten sind in Abschnitt A.1 im Anhang dargestellt. Angenommen es gibt einen Graphen G^* mit einem Mindestgewicht von $w(K^i) + 1$. Wir unterteilen die Knotenmenge $V = V(G^*)$ in $T = \{v \in V \text{ mit } d(v) \geq \frac{w(K^i)+1}{2}\}$ und $R = \{v \in V \text{ mit } d(v) \leq \frac{w(K^i)}{2}\}$. Natürlich haben alle Knoten aus T einen Grad kleiner oder gleich $n - 1$. Die Knoten aus R bilden eine unabhängige Menge und sind nur mit Kanten aus T verbunden. Damit gilt:

$$\forall v \in R : d(v) \geq w(K^i)^* + 1 - (n-1) = w(K^i) - n + 2.$$

Damit erhalten wir relativ enge obere und untere Schranken für die Grade der Knoten in R und T.

Wir führen eine Fallunterscheidung nach $t = |T|$ durch und es muss gelten

$$t \geq \frac{n}{2},$$

weil andernfalls nicht genug Kanten im Graphen „untergebracht“ werden können.

Ausgehend von diesen Überlegungen können wir die folgenden Kriterien auf jeden der verbleibenden Fälle anwenden und damit ausschließen, dass ein Graph mit höherem Gewicht konstruierbar ist.

Algorithmus
Berechne

$$u = \max(w(K) + 2 - n; 1),$$

dabei ist u der Mindestgrad der Knoten in der Knotenteilmenge R, wie oben beschrieben. Da der Graph zusammenhängend ist, ist 1 auch eine untere Schranke für den Knotengrad.
Berechne für alle t

$$x = 2m - (t * \frac{w(K)+1}{2} + r * u).$$

Anschaulich betrachtet, bezeichnet x die Anzahl der noch nicht durch die Mindestgrade vergebenen Gradpunkte. Falls $x < 0$, dann kann kein Graph konstruiert werden, weil dann nicht genug Kanten vorhanden sind, um die Mindestgrade zu realisieren.

Falls $x = 0$, dann ist allein durch die Mindestanforderungen die maximale Gradsumme von $2m$ erreicht. In diesem Fall können wir das Gewicht des neuen Kandidaten direkt berechnen als

$$w_{x=0} = u + \frac{w(K) + 1}{2}.$$

Falls $w_{x=0} < w(K^i)$, dann ist mit diesem Wert für t kein Graph höheren Gewichts konstruierbar. Für die Gradverteilung in der Knotenmenge R gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Alle Knoten in R haben Grad $\lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$. Daraus folgt, dass es in T mindestens $\lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$ Knoten mit Grad $w(K^i) + 1 - \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$ gibt. Damit können wir die Mindestgradsumme A_1 wie folgt abschätzen:

$$A_1 = (n-t)\lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor + \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor (w(K^i)+1-\lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor) + (t - \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor) \lceil \frac{w(K^i) + 1}{2} \rceil.$$

   Hier kann der Fall eintreten, dass $t < \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$. Anschaulich bedeutet es, dass nicht alle Knoten in R ein Gewicht von $\lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$ haben können, weil Knoten aus R nur mit Knoten aus T verbunden sein können und es also gar nicht genug potentielle Nachbarknoten gibt. Für den Algorithmus setzen wir in diesem Fall

$$A_1 = 2m + 1.$$

2. Mindestens ein Knoten in R hat einen Grad von a mit

$$u \leq a < \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor.$$

   Daraus folgt, dass es in T mindestens a Knoten mit Grad $w(K^i) + 1 - a$ gibt. Damit können wir für alle in Frage kommenden Werte für a die Mindestgradsumme A_2 wie folgt abschätzen:

$$A_2 = a + (n - t - 1)u + a(w(K^i) + 1 - a) + (t - a)\lceil \frac{w(K^i) + 1}{2} \rceil.$$

Es kann kein Graph mit höherem Gewicht als $w(K^i)$ konstruiert werden, wenn gilt

- $u > t$ oder
- $\forall j \in \{1; 2\} : A_j > 2m$

Mit Hilfe dieser Überlegungen, können wir die exakten Werte für alle verbleibenden Fälle berechnen (Siehe Tabelle 4.3).

Damit können wir den den folgenden Satz formulieren:

Folgerung:
Die Ergebnisse aus [HJS08] für dichte Graphen können mit Hilfe von Satz 4.6.2 und den Werten aus Tabelle 4.3 vervollständigt werden. Damit ist dieses Teilproblem vollständig gelöst.

Beispiel

Exemplarisch werden wir im Folgenden die Vorgehensweise für Fall 1 im Detail beleuchten: Wir betrachten hier Graphen mit 9 Knoten und 27 Kanten. Der Kandidat, wie in der Tabelle 4.3 ersichtlich, ist ein $K_{3,3,3}$ mit einem Gewicht von 12. Wir versuchen also nun einen Graphen mit 9 Knoten, 27 Kanten und einem Gewicht von 13 zu konstruieren. Wie oben beschrieben, berechnen wir

$$u = max\{w(K) + 2 - n, 1\} = 5,$$

das bedeutet, dass alle Knoten in der Knotenteilmenge R mindestens Grad 5 haben. Wegen $t > \frac{n}{2}$ kommen für t die Werte $5, 6, 7, 8$ und 9 in Betracht. Bei der Berechnung des Parameters x, stellen wir fest, dass dieser nur für $t \in \{5, 6\}$ nicht negativ wird und damit nur dann eine solche Konstruktion überhaupt möglich ist.

$\underline{t = 5:}$

Wir erhalten $x = 1,5$. Bei der Berechnung von A_1 stellen wir fest, dass $t < \lfloor \frac{w(K^i)}{2} \rfloor$. Damit setzen wir $A_1 = 55$.

Wir berechnen A_2, dabei kommt für a nur ein potentieller Wert in Frage: $a = 5$. Wir erhalten $A_2 = 60$. Damit sind sowohl A_1, als auch A_2 größer als $2m$ und damit ist hier kein Graph mit Gewicht 13 konstruierbar.

$\underline{t = 6:}$

Hier tritt der Sonderfall $x = 0$ in Kraft mit $w_{x=0} = 5 + 6,5 = 11,5 < 13$, also ist hier kein Graph höheren Gewichts konstruierbar.

Damit ist der Nachweis für diesen Fall geführt, dass kein größeres Gewicht als 12 möglich ist und damit

$$w(\mathcal{C}, 9, 27) = 12$$

Tabelle 4.3: Kandidaten und Gewichte

Nr	n	m	Kandidat	Gewicht
1	9	27	$K^1 = K_{3,3,3}$	12
2	9	28	$K^2 = (K_5 - 2e) \bigoplus I_4$	12
3	10	36	$K^3 = \overline{P_{10}}$	14
4	11	41	K^4	14
5	11	42	$K^5 = K_1^5 \bigoplus I_5$	15
6	11	43	$K^6 = K_1^6 \bigoplus I_4$	15
7	11	44	K^7	15
8	11	45	$K^8 = \overline{P_{11}}$	16
9	12	52	$K^9 = K_1^9 \bigoplus I_4$	17
10	12	53	$K^{10} \overline{P_{10}}$	17
11	12	54	$K^{11} = \overline{K_1^{11}} \bigoplus I_5$	17
12	12	55	$K^{12} = \overline{P_{12}}$	18
13	13	58	K^{13}	17
14	13	59	K^{14}	17
15	13	60	$K^{15} = \overline{K_1^{15}} \bigoplus I_6$	18
16	13	61	$K^{16} = \overline{K_1^{16}} \bigoplus I_6$	18
17	13	62	$K^{17} = \overline{K_1^{17}} \bigoplus I_6$	18
18	13	63	$K^{18} = K_7 \bigoplus I_6$	19
19	13	64	$K^{19} = \overline{K_1^{19}} \bigoplus I_5$	19
20	13	65	$K^{20} = \overline{K_1^{20}} \bigoplus I_5$	19
21	13	66	$K^{21} = \overline{P_{13}}$	20
22	14	71	K^{22}	19
23	14	72	$K^{23} = \overline{K_1^{23}} \bigoplus I_6$	20
24	14	73	$K^{24} = \overline{K_1^{24}} \bigoplus I_6$	20
25	14	74	$K^{25} = \overline{K_1^{25}} \bigoplus I_6$	20
26	14	75	$K^{26} = \overline{K_1^{26}} \bigoplus I_6$	20
27	14	76	$K^{27} = K_8 \bigoplus I_6$	21
28	14	77	$K^{28} = \overline{K_1^{28}} \bigoplus I_6$	21
29	14	78	$K^{29} = \overline{P_{14}}$	22

5 Von der Dominanz zusammenhängender Graphen

Anschließend an die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels stellt sich ganz natürlich die folgende Frage.

5.1 Fragestellung und Vermutung

Gegeben sei ein Graph G mit $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ und $\delta(G) > 0$. Gibt es dann immer einen zusammenhängenden Graphen G^* für den gilt $|V(G^*)| = n$, $|E(G^*)| = m$ und $w(G^*) \geq w(G)$?

Für Graphen mit unbeschränktem Minimalgrad gilt das Resultat aus [IJ91].

Bemerkung:
Wir betrachten im folgenden nur Graphen G mit $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m \geq n - 1$, da nur dann auch ein zusammenhängender Graph mit gleicher Kantenzahl und ohne isolierte Knoten konstruierbar ist.

Diese Fragestellung kann im Folgenden nicht vollständig beantwortet werden. Mehrere Teilresultate sind aber beweisbar und wir treffen folgende Vermutung:

Vermutung:
Gegeben sei ein Graph G mit $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ und $\delta(G) > 0$. Dann gibt es immer einen zusammenhängenden Graphen G^* für den gilt $|V(G^*)| = n$, $|E(G^*)| = m$ und $w(G^*) \geq w(G)$.

Wenn die obige Vermutung zutrifft, dann können wir folgende Aussage formulieren:

Folgerung:
Für die Graphenklasse $D_{\delta>0}$ aller Graphen mit echt positivem Minimalgrad gilt wegen $C \subseteq D_{\delta>0}$

$$w(D_{\delta>0}, n, m) = w(C, n, m). \tag{5.1}$$

Für einige Graphenklassen können wir die Gültigkeit der Vermutung beweisen.

5.2 Dichte Graphen

In diesem Abschnitt betrachten wir Graphen mit einer hohen Kantendichte. Hier gilt die folgende Aussage:

Satz 5.2.1. *Gegeben sei ein Graph G mit $|V(G)| = n \leq 2k$, $|E(G)| = m$ und $\delta(G) > 0$. Dabei ist k der Parameter aus der Konstruktion aus Kapitel 4.5. Dann gibt es immer einen zusammenhängenden Graphen G^* für den gilt $|V(G^*)| = n$, $|E(G^*)| = m$ und $w(G^*) \geq w(G)$.*

Beweis:
Der Graph G besteht aus $c \geq 2$ Komponenten C_i mit jeweils n_i Knoten, m_i Kanten und $i \in \{1, \ldots, c\}$. Mindestens eine der Komponenten hat nicht mehr als $\frac{n}{2}$ Knoten. O.B.d.A. gelte $n_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Damit kann für das Gewicht von G nur $w(G) \leq 2n_1 - 2 \leq n - 2$ gelten. Laut Konstruktion 4.5 gilt $w(G^*) \geq 2k - 2$.
Angenommen es gelte $w(G^*) < w(G)$, dann folgt mit

$$n - 2 \geq w(G) > w(G^*) \geq 2k - 2, \tag{5.2}$$

also

$$n > 2k. \tag{5.3}$$

Das stellt einen Widerspruch zu den Voraussetzungen dar. □

Bemerkung:
Durch genauere Abschätzung von $w(G^*)$, kann die Schranke für n möglicherweise noch verschärft werden.

5.3 Fall m=n-1

Im folgenden untersuchen wir den Sonderfall von Graphen mit n Knoten und $n-1$ Kanten. In diesem Fall können wir die obige Vermutung beweisen.

Satz 5.3.1. *Gegeben sei ein Graph G mit $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m = n-1$ und $\delta(G) > 0$. Dann $\exists G^*$ mit*

1. $|V(G^*)| = n, |E(G^*)| = m,$
2. *G^* zusammenhängend und*
3. $w(G^*) \geq w(G)$.

Beweis:
Für den Graphen G^* kann ein Gewicht von $w(G^*) = n$ erreicht werden, wenn G^* ein Stern $K_{1,n-1}$ ist.
Der Graph G besteht aus c Komponenten C_i mit jeweils n_i Knoten, m_i Kanten und $i \in \{1,\dots,c\}$. Im Graphen G ist mindestens eine Komponente C_1 ein Baum und dadurch hat G ein Gewicht von $w(G) \leq m_1$. Damit wäre die Aussage bewiesen.
Angenommen alle Komponenten von G seien keine Bäume. Dann gilt $\forall i : m_i \geq n_i$.
Daraus folgt $n-1 = m = \sum_{i=1}^{c} m_i \geq \sum_{i=1}^{c} n_i = n$, ein Widerspruch. □

5.4 Teilresultate

Für Graphen, deren Kantenzahl nicht in die oben angegebenen Intervalle gehören, stellen wir eine vereinfachte Frage:
Wann ist es möglich aus einem Graphen mit zwei Komponenten einen zusammenhängenden Graphen mit gleicher Knoten- und Kantenzahl und nicht-kleinerem Gewicht zu konstruieren?
Wir geben zwei Konstruktionsmöglichkeiten an und analysieren anschließend ihre Funktionsweise für die oben genannte Fragestellung.

5.4.1 Konstruktion A

Gegeben sei ein Graph G mit zwei Komponenten G_1 und G_2. Da $\delta(G) \geq 1$ gilt, enthält jede Komponente mindestens eine Kante. Wir wählen nun zwei Kanten

$e_1 = (u_1, v_1) \in E(G_1)$ und $e_2 = (u_2, v_2) \in E(G_2)$.
Wir konstruieren einen Graphen G^* durch Löschen der Kanten e_1 und e_2 und Einfügen der Kanten $e_1^* = (u_1, u_2)$ und $e_2^* = (v_1, v_2)$.

Beobachtungen

Mit der obigen Konstruktion gilt:

1. Für die jeweils korrespondierenden Knoten v gilt:
$$d_G(v) = d_{G^*}(v);$$
2. wenn entweder e_1 oder e_2 keine Brücke ist, dann ist G^* zusammenhängend.

5.4.2 Konstruktion B

Gegeben sei ein Graph G mit zwei Komponenten G_1 und G_2. Wegen der Beschränkung der Kantenzahl muss mindestens eine der beiden Komponenten eine Kante $e = (u_1, u_2)$ enthalten, die keine Brücke ist. Es gelte o.B.d.A. $e \in E(G_1)$ und $d(u_1) \geq d(u_2)$.
Wir konstruieren einen Graphen G^* durch Löschen der Kante e und Einfügen einer beliebigen Kante (u_1, v) mit $v \in E(G_2)$ und $d(v) = \Delta_{G_2}$.

Beobachtungen

Mit der obigen Konstruktion gilt:

1. Für die jeweils korrespondierenden Knoten v gilt:
$$d_{G^*}(v) \geq d_G(v) - 1;$$
2. außerdem
$$w(G^*) \geq w(G) - 1.$$

5.4.3 Resultate

Unter Verwendung der vorher angegebenen Konstruktionen können wir die folgenden zwei Aussagen beweisen:

Satz 5.4.1. *Gegeben sei Graph G mit zwei Komponenten G_1 und G_2. Dabei sei G_1 ein 2-fach zusammenhängender Graph und beide Graphen seien nicht bipartit. Dann können wir einen Graphen G^* konstruieren mit $n(G^*) = n(G_1) + n(G_2)$, $m(G^*) = m(G_1) + m(G_2)$ und $w(G^*) \geq w(G)$.*

Beweis:
Zur Konstruktion des Graphen G^* verwenden wir die Konstruktion A und wählen für u_1, u_2, v_1 und v_2 jeweils Knoten mit einem Grad $d \geq \lfloor \frac{w(G)}{2} \rfloor$. Damit ist gewährleistet, dass $w(G^*) \geq w(G)$. Da G_1 2-fach zusammenhängend ist, ist $e_1 = (u_1, v_1)$ keine Brücke und damit ist G^* zusammenhängend.
Angenommen es existiert in einer der beiden Komponenten keine Kante deren Endknoten jeweils einen Grad $d \geq \lfloor \frac{w(G)}{2} \rfloor$ besitzen. Dann müsste diese Komponente jedoch entgegen der Voraussetzungen bipartit sein, da auch die Knoten mit Grad $d < \lfloor \frac{w(G)}{2} \rfloor$ wegen des Gewichtes $w(G)$ nicht durch eine Kante verbunden sein können. $\square$

Satz 5.4.2. *Gegeben sei ein Graph G mit zwei Komponenten G_1 und G_2. Wenn $w(G_1) \neq w(G_2)$, dann können wir einen G^* konstruieren mit $n(G^*) = n(G_1)+n(G_2)$, $m(G^*) = m(G_1) + m(G_2)$ und $w(G^*) \geq w(G)$.*

Beweis:
O.B.d.A. gilt $w(G_1) > w(G_2)$. Zur Konstruktion verwenden wir die Konstruktion B, wie oben beschrieben. $\square$

Durch genauere Analysen können die Ergebnisse noch verfeinert werden.

6 Ausblick

Die Untersuchung von maximalen Kantengewichten ist, wie wir gesehen haben, eine direkte Konsequenz der Untersuchungen von Gradsummen und der eulerschen Polyederformel. Viele Resultate sind schon bekannt. Diese Arbeit liefert einen Beitrag diese Ergebnisse zu vervollständigen. Im Folgenden sollen noch einige offene Fragestellungen vorgestellt werden.

Verallgemeinerung auf Graphen mit m>3n-6: Wir können uns die Frage stellen, ob die Ansätze aus Kapitel 4.4 übertragbar sind auf Graphen mit mehr als $3n - 6$ Kanten. Bereits bei der Untersuchung der Graphen mit $2n - 3 < m \leq 3n - 6$ sind Ausnahmegraphen aufgetreten. Wir vermuten, dass für dichtere Graphen mehr Ausnahmen bestehen, die prinzipielle Vorgehensweise jedoch ähnlich angewandt werden kann.

Dominanz der zusammenhängenden Graphen: Für die in Kapitel 5 diskutierte Fragestellung konnten dort nur erste Ansätze geliefert werden. Eine vollständige Beantwortung steht noch aus.

Die weitere Untersuchung der oben genannten noch offenen Probleme verspricht eine lohnende Auseinandersetzung und ein besseres Verständnis der Struktur optimaler Kandidatengraphen.

Literaturverzeichnis

[Die10] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.

[EO99] Hikoe Enomoto and Katsuhiro Ota. Connected subgraphs with small degree sums in 3-connected planar graphs. *J. Graph Theory*, 30(3):191–203, 1999.

[FM10] Barbora Ferencová and Tomáš Madaras. Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight. *Discrete Math.*, 310(12):1661–1675, 2010.

[HJS08] Mirko Horňak, Stanislav Jendrol', and Ingo Schiermeyer. On maximum weight of a graph of given order, size and property. unveröffentlicht, September 2008.

[Hor11] Mirko Horňak. On maximum weight of a bipartite graph of given order and size. unveröffentlicht, Dezember 2011.

[HVJ+01] J. Harant, M. Voigt, S. Jendrol, B. Randerath, Z. Ryjacek, and I. Schiermeyer. On weights of induced paths and cycles in claw-free and $k_{1,r}$-free graphs. *J. Graph Theory*, 36(3):131–143, 2001.

[IJ91] Jaroslav Ivančo and Stanislav Jendrol'. On extremal problems concerning weights of edges of graphs. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 60:pp. 399–410, 1991.

[JS01] Stanislav Jendrol' and Ingo Schiermeyer. On a max-min problem concerning weights of edges. *Combinatorica*, 21(3):351–359, 2001.

[Kot55] Anton Kotzig. Contribution to the theory of Eulerian polyhedra. *Mathematica Slovaka*, 5(2):101–103, 1955.

[Moh00] Bojan Mohar. Light paths in 4-connected graphs in the plane and other surfaces. *J. Graph Theory*, 34(2):170–179, 2000.

[MvS04] Tomáˇ s Madaras and Riste ˇ Skrekovski. Heavy paths, light stars, and big melons. *Discrete Math.*, 286(1-2):115–131, 2004.

[MvS07] Tomáˇ s Madaras and Riste ˇ Skrekovski. Lightness, heaviness and gravity. *Discrete Math.*, 307(7-8):939–951, 2007.

[MvSV07] T. Madaras, R. ˇ Skrekovski, and H.-J. Voss. The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5. *Discrete Math.*, 307(11-12):1430–1435, 2007.

[Tit03] Peter Tittmann. *Graphentheorie Eine anwendungsorientierte Einführung*. Fachbuchverlag Leipzig, 2003.

Anhang

A.1 Tabelle zu 4.4

Die Tabelle befindet sich auf der CD hinten im Buch.

A.2 Kandidaten zu 4.6

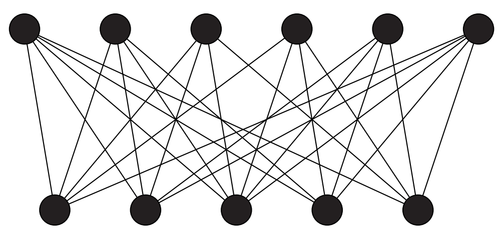

Abbildung A.1: Graph K^4

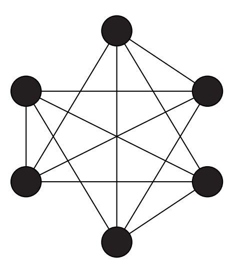

Abbildung A.2: Graph K_1^5

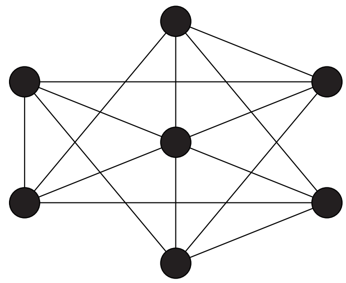

Abbildung A.3: Graph K_1^6

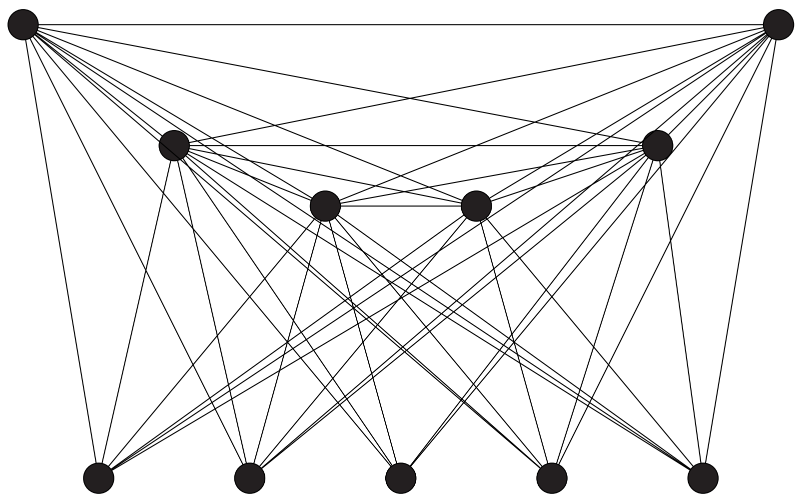

Abbildung A.4: Graph K^7

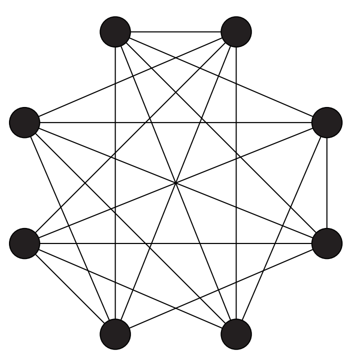

Abbildung A.5: Graph K_1^9

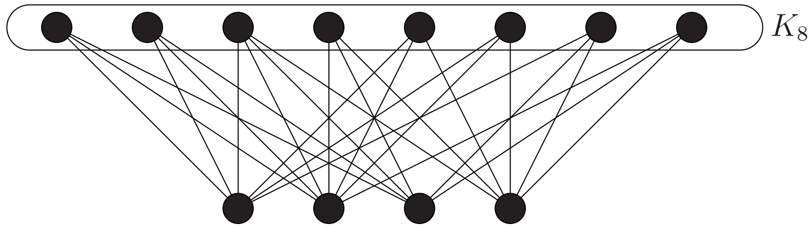

Abbildung A.6: Graph K^{10}

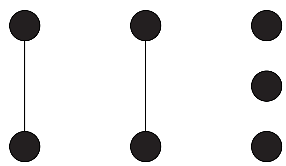

Abbildung A.7: Graph K_1^{11}

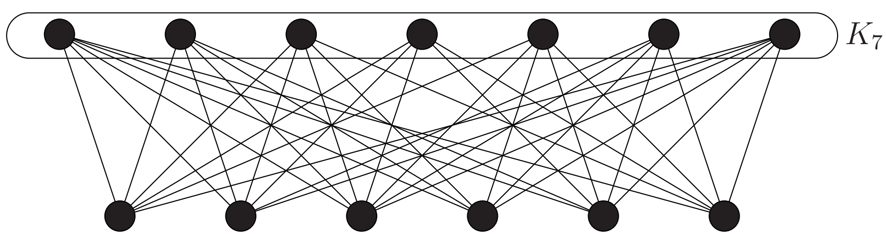

Abbildung A.8: Graph K^{13}

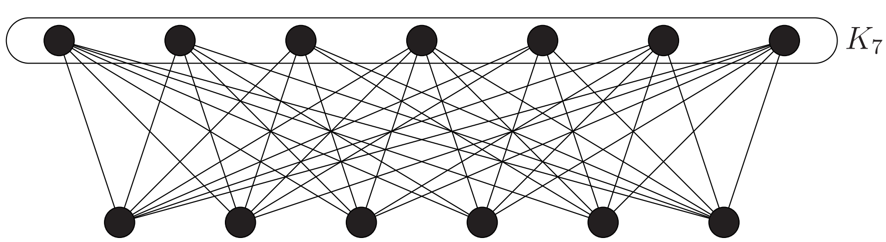

Abbildung A.9: Graph K^{14}

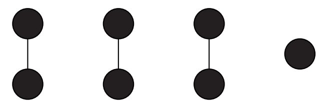

Abbildung A.10: Graph K_1^{15}

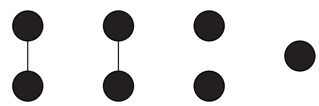

Abbildung A.11: Graph K_1^{16}

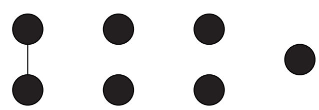

Abbildung A.12: Graph K_1^{17}

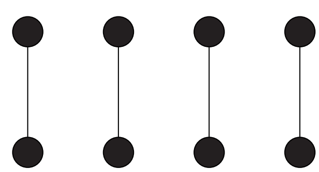

Abbildung A.13: Graph K_1^{19}

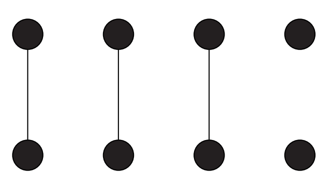

Abbildung A.14: Graph K_1^{20}

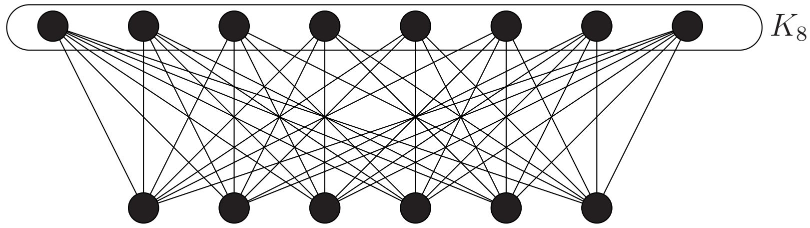

Abbildung A.15: Graph K^{22}

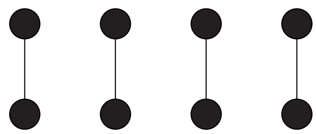

Abbildung A.16: Graph K_1^{23}

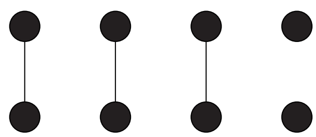

Abbildung A.17: Graph K_1^{24}

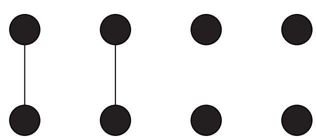

Abbildung A.18: Graph K_1^{25}

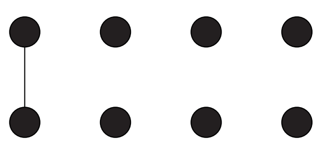

Abbildung A.19: Graph K_1^{26}

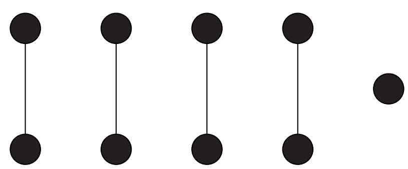

Abbildung A.20: Graph K_1^{28}