Seminararbeit

Optimierung in normierten Räumen

Patrick Mehlitz

Technische Universität Bergakademie Freiberg
14.01.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das mathematische Fachgebiet der Optimierung befasst sich mit der Bestimmung einer bezüglich eines gegebenen Ziels bestmöglichen Entscheidung aus einer bekannten Menge möglicher Entscheidungsalternativen. Dieser Sachverhalt kann allgemein durch eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ x &\in M \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit $f\colon X \supseteq M \longrightarrow \mathbb{R}$ modelliert werden, wobei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller und normierter Vektorraum sei. Sowohl in der Praxis als auch in der Theorie wird dabei oftmals davon ausgegangen, dass die Anzahl vorhandener Entscheidungsvariablen, welche höchstens der Dimension von X entspricht, endlich ist. Für diesen Fall existieren zahlreiche Resultate, wie Existenz- und Eindeutigkeitssätze bezüglich der Lösung, notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen, oder Regularitätsbedingungen, welche eine Untersuchung der Aufgabe (1.1) erleichtern. Viele Problemstellungen der mathematischen Optimierung können jedoch nicht in Vektorräumen endlicher Dimension modelliert werden. Im Rahmen der Kontrolltheorie ist es beispielsweise wesentlich, eine sogenannte optimale Steuerfunktion u zu finden, um ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen bestmöglich aus einem gegebenen Anfangszustand in einen gegebenen Zielzustand zu überführen. Als Entscheidungsvariable tritt nun die Funktion u auf und die Menge M aus (1.1) ist eine Teilmenge eines (unendlichdimensionalen) Funktionenraumes X wie beispielsweise $C(\mathbb{R})$ oder $L_2(\mathbb{R})$.
In dieser Seminararbeit werden Optimierungsaufgaben in allgemeinen normierten Vektorräumen betrachtet. Dabei wird insbesondere untersucht, inwieweit sich einige der oben erwähnten Resultate aus dem endlichdimensionalen Fall verallgemeinern lassen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden ein reeller Vektorraum lediglich als Raum bezeichnet.
Im zweiten Kapitel erfolgt zunächst die Bereitstellung einiger Begriffe aus der Theorie normierter Räume. Dabei werden unter anderem die Konzepte der Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen sowie der Konvergenz von Folgen und der Stetigkeit von Funktionalen zur Betrachtung allgemeiner Räume angepasst. Im Anschluss daran wird ein allgemeines Differentiationsprinzip, die sogenannte Fréchet-Differenzierbarkeit, eingeführt, welches später zur Formulierung von Optimalitätsbedingungen vom Fritz-John-Typ notwendig sein wird. Außerdem werden für die Optimierung wichtige Kegel, insbesondere der Tangenten- und der linearisierte Tangentenkegel, vorgestellt. Des Weiteren wird das Konzept des partiell geordneten Raumes präsentiert.
Nachdem das zweite Kapitel die Grundlagen zur Betrachtung von Optimierungsaufgaben in normierten Räumen gelegt hat, soll im dritten Kapitel zunächst geklärt werden, unter welchen Bedingungen die Aufgabe (1.1) überhaupt Lösungen besitzt. Wesentlich dabei wird eine abgewandelte Form des Satzes von Weierstraß sein, die anhand eines umfangreichen Beispiels aus der Kontrolltheorie illustriert wird. Im Anschluss daran werden allgemeine Optimalitäts- und Regularitätsbedingungen für Aufgaben des Typs (1.1) hergeleitet. Dies geschieht zunächst durch die Verwendung von Tangentenkegeln. Um die so erhaltenen Resultate zu konkretisieren, werden spe-

zielle Optimierungsaufgaben der Form

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g(x) &\in -K \\ h(x) &= \mathfrak{o}_Z \end{aligned} \tag{1.2}$$

untersucht. Dabei seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon X \longrightarrow Y$ bzw. $h\colon X \longrightarrow Z$ Abbildungen eines Banachraumes $(X, \|\cdot\|_X)$ in $\mathbb{R}$, einen partiell geordneten normierten Raum (Y, K) mit Norm $\|\cdot\|_Y$ bzw. einen Banachraum $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Ferner sei $K \subseteq Y$ ein spitzer und konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren. Für die Aufgabe (1.2) wird ein notwendiges Optimalitätskriterium vom Fritz-John-Typ konstruiert. Anschließend werden die Regularitätsbedingungen KRZCQ und MFCQ vorgestellt. Um deren Interpretation zu erleichtern und zu belegen, dass die erhaltenen Resultate tatsächlich Verallgemeinerungen der Ergebnisse des bekannten endlichdimensionalen Falls sind, wird gezeigt, dass KRZCQ und MFCQ im Falle der Betrachtung der Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g_i(x) &\leqslant 0 \qquad ; i = 1, \ldots, m \\ h_j(x) &= 0 \qquad ; j = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ äquivalent sind. Abschließend wird noch einmal die Aufgabe (1.2) im Falle des Vorliegens gewisser verallgemeinerter Konvexitätseigenschaften untersucht. Dabei wird sich zeigen, dass die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen ein hinreichendes Optimalitätskriterium bilden.

2 Analysis normierter Räume

2.1 Grundbegriffe der Funktionalanalysis

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein beliebiger normierter Raum und $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$ die Einheitskugel dieses Raumes. Dann bezeichnet $(X^*, \|\cdot\|_X^*)$ den sogenannten (topologischen) Dualraum zu $(X, \|\cdot\|_X)$, der alle linearen und stetigen Funktionale $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ enthält. Dabei wird die zu X^* gehörende Norm $\|\cdot\|_X^*$ durch die Norm $\|\cdot\|_X$ gemäß

$$\forall f \in X^*: \quad \|f\|_X^* = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$$

induziert. Damit kann im Folgenden stets X^* mit $(X^*, \|\cdot\|_X^*)$ identifiziert werden. Ist X endlichdimensional, so trifft dies auch auf X^* zu und die Dimensionen stimmen insbesondere überein. Für beliebige Elemente $x \in X$ und $f \in X^*$ bezeichnet $\langle x, f\rangle = f(x)$ die Anwendung des Funktionals f auf x. Man bezeichnet dabei die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle: X \times X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ als duale Paarung von X und X^*. An dieser Stelle ist anzumerken, dass das Konzept des Dualraums auch dann verwendet werden kann, wenn X kein normierter Raum ist. In diesem Fall ist trivialerweise X^* auch kein normierter Raum.
In der Optimierung spielt die Trennbarkeit von Mengen oftmals eine bedeutende Rolle. Die folgenden Separationssätze für Mengen in normierten Räumen aus [3] werden im Verlauf dieser Arbeit als wesentliche Beweismittel dienen.

Satz 2.1 *(vgl. Theorem C.3 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $A \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge und $\widehat{x} \in X$ beliebig gewählt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Es gilt $\widehat{x} \notin A$.

(ii) Es existiert ein Funktional $\varphi \in X^* \setminus \{\mathfrak{o}_{X^*}\}$ mit

$$\langle \widehat{x}, \varphi\rangle < \inf_{x \in A} \langle x, \varphi\rangle.$$

Satz 2.2 *(vgl. Theorem C.2 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $A, B \subseteq X$ seien nichtleer sowie konvex und int(A) sei nichtleer. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Es gilt int$(A) \cap B = \varnothing$.

(ii) Es existiert ein Funktional $\varphi \in X^* \setminus \{\mathfrak{o}_{X^*}\}$ und eine Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\forall x \in A \forall y \in B: \quad \langle x, \varphi\rangle \leqslant \gamma \leqslant \langle y, \varphi\rangle$,

(b) $\forall x \in \text{int}(A): \quad \langle x, \varphi\rangle < \gamma$.

Bekanntermaßen ist die Einheitskugel B_X eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ genau dann kompakt (jede Folge in B_X enthält eine bezüglich $\|\cdot\|_X$ konvergente

Teilfolge) wenn X endlichdimensional ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn jede in X beschränkte Folge eine (bezüglich $\|\cdot\|_X$) konvergente Teilfolge besitzt (vgl. Satz I.2.7 in [6]). In der Optimierung sind gerade die letzten Aussagen wesentlich zur Formulierung von Sätzen, welche die Existenz einer Lösung bezüglich einer gegebenen Optimierungsaufgabe garantieren. Da im Unendlichdimensionalen die obigen Eigenschaften nicht zur Verfügung stehen, müssen andere Konzepte als gewöhnliche Kompaktheit oder Konvergenz formuliert werden, um etwa ein anwendbares Analogon zum Satz von Weierstraß herleiten zu können. Ferner wird es häufig notwendig sein, vollständige normierte Räume, also Banachräume, zu betrachten.

Definition 2.1 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum.*

*(i) Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt **schwach konvergent** gegen den schwachen Grenzwert $x \in X$, falls für alle $f \in X^*$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle = \langle x, f\rangle.$$

*(ii) Eine nichtleere Menge $A \subseteq X$ heißt **schwach abgeschlossen**, falls für jede schwach gegen $x \in X$ konvergente Folge $(x_n) \subseteq A$ gerade $x \in A$ gilt.*

*(iii) Eine nichtleere Menge $C \subseteq X$ heißt **schwach folgenkompakt**, falls aus jeder Folge $(x_n) \subseteq C$ eine schwach gegen $x \in X$ konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann, sodass $x \in C$ gilt.*

Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $(x_n) \subseteq X$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge, so ist (x_n) auch schwach konvergent gegen x, da alle Funktionale aus X^* nach Definition stetig sind. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht. Ist X endlichdimensional, so sind Konvergenz und schwache Konvergenz äquivalent. Nach Definition ist jede schwach abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ auch abgeschlossen (der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A liegt selbst in A), da jede konvergente Folge schwach konvergent gegen ihren Grenzwert ist. Auch hier gilt die Umkehrung nicht allgemein. Sollte eine Menge $C \subseteq X$ schwach folgenkompakt sein, so ist diese auch schwach abgeschlossen, da der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. Ferner ist jede kompakte Menge auch schwach folgenkompakt. Ist X endlichdimensional, so ist eine nichtleere Menge genau dann schwach folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (vgl. Anhang A in [3]). Das folgende Beispiel dient der Illustration obiger Begriffe.

Beispiel 2.1 *Es sei $(f_n) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ die gemäß*

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \forall x \in \mathbb{R}\colon f_n(x) = \mathbb{I}_{[n-1,n]}(x)$$

definierte Folge. Zeigen Sie, dass (f_n) schwach konvergent, jedoch nicht konvergent gegen die Nullfunktion $\widehat{f} \equiv 0$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Einheitssphäre $S_{L_2(\mathbb{R})} = \{f \in L_2(\mathbb{R})\colon \|f\| = 1\}$ weder schwach abgeschlossen noch schwach folgenkompakt ist.

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gerade $\|f_n\| = 1$ aufgrund der Definition der Indikatorfunktion. Wegen $\|f_n - \widehat{f}\| = \|f_n\| = 1$ kann die Folge (f_n) nicht gegen $\widehat{f}$

konvergieren. Sei nun $g \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig gewählt (es gilt $L_2(\mathbb{R})^* = L_2(\mathbb{R})$). Dann gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ wegen der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g\rangle| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \mathbb{I}_{[n-1,n]}(x) \cdot g(x) \right| dx = \int\limits_{n-1}^{n} |1 \cdot g(x)| dx \\ &\leqslant \left(\int\limits_{n-1}^{n} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{n-1}^{n} (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{n-1}^{n} (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} =: (\mathcal{I}(n))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wegen $g \in L_2(\mathbb{R})$ gilt insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n-1}^{n} (g(x))^2 dx = \int\limits_{0}^{\infty} (g(x))^2 dx < \infty,$$

womit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(n)$ konvergiert. Damit muss es sich jedoch bei $(\mathcal{I}(n))$ um eine Nullfolge handeln und man erhält:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle f_n, g\rangle| \leqslant \lim_{n\to\infty} (\mathcal{I}(n))^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(n) \right)^{\frac{1}{2}} = 0 = \langle \widehat{f}, g\rangle.$$

Damit konvergiert $(\langle f_n, g\rangle)$ gegen $\langle \widehat{f}, g\rangle$. Da $g \in L_2(\mathbb{R})$ beliebig gewählt wurde, ist dies gleichbedeutend mit der schwachen Konvergenz der Folge (f_n) gegen $\widehat{f}$.
Da wie oben gezeigt $(f_n) \subseteq S_{L_2(\mathbb{R})}$ gilt, (f_n) schwach gegen den schwachen Grenzwert $\widehat{f} \equiv 0$ konvergiert, aber gerade $\|\widehat{f}\| = 0$ erfüllt ist, kann wegen $\widehat{f} \notin S_{L_2(\mathbb{R})}$ die Menge $S_{L_2(\mathbb{R})}$ nicht schwach abgeschlossen sein. Folglich ist sie auch nicht schwach folgenkompakt. □

Das folgende Lemma liefert ein hinreichendes Kriterium für die schwache Abgeschlossenheit einer Teilmenge eines normierten Raumes.

Lemma 2.1 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $A \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann ist A schwach abgeschlossen.*

Beweis:
Angenommen, A ist nicht schwach abgeschlossen. Dann existiert, da $A \neq \varnothing$ vorausgesetzt wurde, eine Folge $(x_n) \subseteq A$, die schwach gegen einen Punkt $\widehat{x} \in X \setminus A$ konvergiert. Nach Satz 2.1 existiert dann ein Funktional $\varphi \in X^* \setminus \{\mathfrak{o}_{X^*}\}$ mit $\langle \widehat{x}, \varphi\rangle < \inf_{x\in A}\langle x, \varphi\rangle$. Insbesondere existiert eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\langle \widehat{x}, \varphi\rangle < \alpha \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n, \varphi\rangle$. Es gilt folglich:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \langle x_n, \varphi\rangle - \langle \widehat{x}, \varphi\rangle \geqslant \alpha - \langle \widehat{x}, \varphi\rangle > 0.$$

Damit kann die Folge $(\langle x_n, \varphi\rangle)$ jedoch nicht gegen $\langle \widehat{x}, \varphi\rangle$ konvergieren. Folgerichtig konvergiert (x_n) nicht schwach gegen $\widehat{x}$. Dies ist offenbar ein Widerspruch, also muss A schwach abgeschlossen sein. #

Definition 2.2 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional und $\widehat{x} \in X$ beliebig gewählt. f heißt in $\widehat{x}$ **schwach unterhalbstetig**, falls für alle Folgen $(x_n) \subseteq X$, die schwach gegen $\widehat{x}$ konvergieren, die folgende Beziehung gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(\widehat{x}).$$

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Ist $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein in $\widehat{x} \in X$ schwach unterhalbstetiges Funktional, so ist f in $\widehat{x}$ unterhalbstetig. Sollte f in jedem Punkt $x \in X$ schwach unterhalbstetig sein, so heißt f schwach unterhalbstetig. Ist umgekehrt f in $\widehat{x} \in X$ unterhalbstetig, so muss f in $\widehat{x}$ keineswegs schwach unterhalbstetig sein. Problematischer Weise muss selbst aus der Stetigkeit von f in $\widehat{x}$ nicht die dortige schwache Unterhalbstetigkeit folgen. Auch dazu folgt hier ein kleines Beispiel.

Beispiel 2.2 *Betrachtet wird das Funktional $\varphi\colon L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, welches durch*

$$\forall f \in L_2(\mathbb{R})\colon \quad \varphi(f) = 1 - \|f\|$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass φ überall stetig, jedoch in $\widehat{f} \equiv 0$ nicht schwach unterhalbstetig ist.

Es seien $f \in L_2(\mathbb{R})$ und eine gegen f konvergente Folge $(f_n) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ beliebig gewählt. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$0 \leqslant |\varphi(f_n) - \varphi(f)| = |\|f\| - \|f_n\|| \leqslant \|f_n - f\|.$$

Da (f_n) nach Annahme gegen f konvergiert, strebt $\|f_n - f\|$ für wachsende n gegen 0. Folglich ist φ in f stetig.
Sei nun speziell die Folge $(f_n) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ aus Beispiel 2.1 betrachtet. Diese konvergiert (wie gezeigt wurde) schwach gegen $\widehat{f}$. Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_n\| = 1$. Damit erhält man die folgende Ungleichung:

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \liminf_{n\to\infty}(1 - \|f_n\|) = 0 < 1 = \varphi(\widehat{f}).$$

Damit kann φ jedoch nicht schwach unterhalbstetig in $\widehat{f}$ sein. □

Das folgende Lemma zeigt durch die Vielzahl benötigter Voraussetzungen, dass es sich bei schwacher Unterhalbstetigkeit um eine sehr starke Eigenschaft von Funktionalen handelt.

Lemma 2.2 *(vgl. Lemma 2.11 in [3]) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $A \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, so ist jedes stetige und quasikonvexe Funktional $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig.*

Beweis:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Angenommen, die Niveaumenge $L_\alpha = \{x \in A\colon f(x) \leqslant \alpha\}$ ist nichtleer. Da f stetig und A abgeschlossen ist, muss L_α abgeschlossen sein. Ferner ist L_α auch konvex, da f quasikonvex über der konvexen Menge A ist. Lemma 2.1 liefert nun, dass L_α schwach abgeschlossen ist.
Angenommen, f ist nicht schwach unterhalbstetig. Dann existiert eine schwach gegen $\widehat{x} \in A$ konvergente Folge $(x_n) \subseteq A$ mit der Eigenschaft

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(\widehat{x}).$$

Insbesondere existiert eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < \alpha < f(\widehat{x})$. Damit existiert jedoch zumindest eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n), die in der Niveaumenge L_α

enthalten ist. Als Teilfolge der schwach gegen $\widehat{x}$ konvergenten Folge (x_n) konvergiert auch (x_{n_k}) schwach gegen $\widehat{x}$. Da jedoch $f(\widehat{x}) > \alpha$ gilt, ist $\widehat{x}$ kein Element von L_α. Damit ist L_α aber nicht schwach abgeschlossen. Dies steht im Widerspruch zum ersten Teil des Beweises. #

Definition 2.3 *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt **reflexiv**, wenn seine Einheitskugel B_X schwach folgenkompakt ist.*

In der am Ende dieser Arbeit in Anhang A befindlichen Übersicht verschiedener Banachräume findet sich unter anderem auch ein Vermerk, ob es sich jeweils um reflexive Räume handelt oder nicht. Folgend werden zwei aus Sicht der Optimierung sehr willkommene Eigenschaften reflexiver Banachräume angegeben.

Lemma 2.3 *(vgl. Theorem III.3.7 in [6], Theorem B.4 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

(ii) Jede nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von X ist schwach folgenkompakt.

Offenbar ist die Voraussetzung der Konvexität in Aussage *(ii)* dieses Lemmas wesentlich. Wie in Beispiel 2.1 gezeigt wurde, ist die Einheitsspäre $S_{L_2(\mathbb{R})}$ nicht schwach folgenkompakt, jedoch offenbar nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

2.2 Fréchet-Differenzierbarkeit

Zur Formulierung von Optimalitätsbedingungen ist es notwendig, das lokale Verhalten von Abbildungen in gewissen Punkten zu beschreiben. In der endlichdimensionalen Optimierung werden hierfür im Fall differenzierbarer Funktionen lineare Approximationen wie Gradienten genutzt. Diese können auch als lineare Operatoren interpretiert werden. Diese Erkenntnis wird nun genutzt, um ein verallgemeinertes Differentiationsprinzip einzuführen, welches auch in unendlichdimensionalen Räumen Anwendung findet.

Definition 2.4 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $A \subseteq X$ sei nichtleer und offen, $f\colon A \longrightarrow Y$ sei eine gegebene Abbildung und $\widehat{x} \in A$ sei beliebig gewählt. Existiert ein linearer und stetiger Operator $f'(\widehat{x})\colon X \longrightarrow Y$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

so heißt f in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar und $f'(\widehat{x})$ Fréchet-Ableitung von f in $\widehat{x}$.

Es mögen die Voraussetzungen aus der obigen Definition erfüllt sein. Dann ist f in $\widehat{x}$ genau dann Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(\widehat{x})$, wenn eine Funktion $o\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{o(\|h\|_X)}{\|h\|_X} = 0 \tag{2.1}$$

existiert, sodass für alle $h \in X$ mit $\widehat{x} + h \in A$ gilt:

$$\|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y = o(\|h\|_X). \tag{2.2}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $h \in X$ mit $\widehat{x} + h \in A$ und $\|h\|_X < \delta$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y < \varepsilon \|h\|_X.$$

Mit der Wahl von $\delta = \varepsilon \cdot (\varepsilon + \|f'(\widehat{x})\|)^{-1}$ ($\|\cdot\|$ bezeichne die Norm im Raum der stetigen linearen Operatoren von X nach Y, vgl. hierzu auch Kapitel II.10 in [2]) folgt wegen der obigen Überlegungen

$$\begin{aligned}
\|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x})\|_Y &\leqslant \|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y + \|f'(\widehat{x})[h]\|_Y \\
&< \varepsilon\|h\|_X + \|f'(\widehat{x})\| \cdot \|h\|_X = (\varepsilon + \|f'(\widehat{x})\|)\|h\|_X \\
&< (\varepsilon + \|f'(\widehat{x})\|) \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|f'(\widehat{x})\|} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit f in $\widehat{x}$ auch stetig ist.
Ferner kann aus Definition 2.4 oder (2.2) direkt gefolgert werden, dass stets die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]}{\|h\|_X} = \mathfrak{o}_Y. \tag{2.3}$$

Handelt es sich bei f um eine stetige lineare Abbildung, so folgt wegen $f(x+h) = f(x) + f(h)$ gerade

$$\|f(x+h) - f(x) - f(h)\|_Y = 0,$$

womit f nach (2.2) in jedem Punkt $x \in A$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(x) = f$ sein muss.
Ist $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (im gewohnten Sinne), so gilt nach dem Satz von Taylor

$$|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - \nabla f(\widehat{x})^T h| = o(\|h\|).$$

Somit ist f in $\widehat{x}$ nach (2.2) Fréchet-differenzierbar. Als Fréchet-Ableitung ergibt sich ferner der transponierte Gradient $\nabla f(\widehat{x})^T$, also kann das Prinzip der Fréchet-Differenzierbarkeit als sinnvolle Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differentiation angesehen werden.
Im Folgenden werden wesentliche Regeln im Umgang mit Fréchet-differenzierbaren Abbildungen vorgestellt, die im weiteren Verlauf der Arbeit noch benötigt werden.

Lemma 2.4 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $A \subseteq X$ sei nichtleer sowie offen und $f, g\colon A \longrightarrow Y$ seien gegebene Abbildungen, welche in $\widehat{x} \in A$ Fréchet-differenzierbar sind. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Die Abbildung $f + g$ ist in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})$.

(ii) Für jede Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\alpha \cdot f$ in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $\alpha \cdot f'(\widehat{x})$.

Beweis:

(i) Da f und g in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar sind, existieren wegen (2.2) Funktionen $o_f, o_g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (2.1), sodass

$$\begin{aligned} \|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y &= o_f(\|h\|_X) \\ \|g(\widehat{x}+h) - g(\widehat{x}) - g'(\widehat{x})[h]\|_Y &= o_g(\|h\|_X) \end{aligned}$$

für alle $h \in X$, für die $\widehat{x}+h \in A$ erfüllt ist, gilt. Damit gilt jedoch wegen der Linearität der Operatoren $f'(\widehat{x})$ und $g'(\widehat{x})$

$$\begin{aligned} &\|(f+g)(\widehat{x}+h) - (f+g)(\widehat{x}) - (f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}))[h]\|_Y \\ &\quad = \|f(\widehat{x}+h) + g(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - g(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h] - g'(\widehat{x})[h]\|_Y \\ &\quad \leqslant \|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y + \|g(\widehat{x}+h) - g(\widehat{x}) - g'(\widehat{x})[h]\|_Y \\ &\quad = o_f(\|h\|_X) + o_g(\|h\|_X). \end{aligned}$$

Da die Funktion $o = o_f + o_g$ offenbar ebenfalls die Eigenschaft (2.1) besitzt, muss $f+g$ in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar mit der Fréchet-Ableitung $f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})$ sein.

(ii) Diese Aussage folgt unter Ausnutzung der positiven Linearität der Norm und der Tatsache, dass mit o auch $|\alpha| \cdot o$ die Eigenschaft (2.1) besitzt, aus (2.2). #

Lemma 2.5 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sowie $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ nichtleer und offen, die Abbildung $f \colon A \longrightarrow B$ sei in $\widehat{x} \in A$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(\widehat{x})$ und die Abbildung $g \colon B \longrightarrow Z$ sei in $\widehat{y} = f(\widehat{x})$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $g'(\widehat{y})$. Dann ist die Abbildung $f \circ g$ in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(\widehat{x}) \circ g'(\widehat{y})$.*

Beweis:
Da f bzw. g in $\widehat{x}$ bzw. $\widehat{y}$ Fréchet-differenzierbar sind, existieren wegen (2.2) Funktionen $o_f, o_g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (2.1) , sodass

$$\begin{aligned} \|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y &= o_f(\|h\|_X) \\ \|g(\widehat{y}+k) - g(\widehat{y}) - g'(\widehat{y})[k]\|_Z &= o_g(\|k\|_Y) \end{aligned}$$

für alle $h \in X$ bzw. $k \in Y$, für die $\widehat{x}+h \in A$ bzw. $\widehat{y}+k \in B$ erfüllt ist, gilt. Mit der speziellen Wahl von $k = f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x})$ und $\|h\|_X$ hinreichend klein erhält man die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} &\|(f \circ g)(\widehat{x}+h) - (f \circ g)(\widehat{x}) - (f'(\widehat{x}) \circ g'(\widehat{y}))[h]\|_Z \\ &\quad = \|g(f(\widehat{x}+h)) - g(f(\widehat{x})) - g'(\widehat{y})\big[f'(\widehat{x})[h]\big]\|_Z \\ &\quad = \|g(\widehat{y}+k) - g(\widehat{y}) - g'(\widehat{y})\big[f'(\widehat{x})[h]\big]\|_Z \\ &\quad \leqslant \|g(\widehat{y}+k) - g(\widehat{y}) - g'(\widehat{y})[k]\|_Z + \|g'(\widehat{y})[k] - g'(\widehat{y})\big[f'(\widehat{x})[h]\big]\|_Z \\ &\quad = o_g(\|k\|_Y) + \|g'(\widehat{y})\big[k - f'(\widehat{x})[h]\big]\|_Z \\ &\quad \leqslant o_g(\|k\|_Y) + \|g'(\widehat{y})\| \cdot \|f(\widehat{x}+h) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[h]\|_Y \\ &\quad = o_g(\|k\|_Y) + \|g'(\widehat{y})\| \cdot o_f(\|h\|_X). \end{aligned}$$

Da zum einen $\|g'(\widehat{y})\|$ eine positive Konstante ist und zum anderen mit $\|h\|_X \to 0$ wegen der Wahl von k und der Stetigkeit von f in $\widehat{x}$ auch $\|k\|_Y$ gegen 0 strebt, besitzt der Ausdruck $\widehat{o}(\|h\|_X) := o_g(\|k\|_Y) + \|g'(\widehat{x})\| \cdot o_f(\|h\|_X)$ die Eigenschaft (2.1). Damit muss eine Funktion $o\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren, welche die Eigenschaft (2.1) besitzt und gleichzeitig

$$\|(f \circ g)(\widehat{x} + h) - (f \circ g)(\widehat{x}) - (f'(\widehat{x}) \circ g'(\widehat{y}))[h]\|_Z = o(\|h\|_X)$$

für alle $h \in X$, für die $\widehat{x} + h \in A$ gilt, erfüllt. Wegen (2.2) ist damit die Aussage des Lemmas gezeigt. #

Das folgende Beispiel soll das Prinzip der Fréchet-Differenzierbarkeit illustrieren und gleichzeitig einen kurzen Einblick in das mathematische Gebiet der Kontrolltheorie offenbaren.

Beispiel 2.3 *Gegeben sei eine stetig differenzierbare Gewichtsfunktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $g(0) = 0$ und eine Idealsteuerung $\widehat{u} \in C([t_0, t_1])$. Dann kann ein Funktional $f\colon C([t_0, t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ gemäß*

$$\forall u \in C([t_0, t_1])\colon \quad f(u) = \int_{t_0}^{t_1} g(u(t) - \widehat{u}(t))dt$$

definiert werden, um beispielsweise zulässige Kontrollfunktionen u eines linearen Kontrollsystems

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t)$$

mit stetigen Funktionen $a, b\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zu bewerten. Zeigen Sie, dass f überall Fréchet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Fréchet-Ableitung dieses Funktionals in einem beliebigen Punkt $u \in C([t_0, t_1])$.

Es seien $\varphi\colon C([t_0, t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi\colon C([t_0, t_1]) \longrightarrow C([t_0, t_1])$ die gemäß

$$\forall y \in C([t_0, t_1])\colon \quad \varphi(y) = \int_{t_0}^{t_1} g(y(t))dt\,, \quad \psi(y) = y - \widehat{u}$$

definierten Abbildungen. Damit gilt $f = \psi \circ \varphi$ und Lemma 2.5 kann zur Lösung der Aufgabe herangezogen werden. Wegen

$$\forall h \in C([t_0, t_1])\colon \|\psi(y + h) - \psi(y) - h\| = \|y + h - \widehat{u} - (y - \widehat{u}) - h\| = 0$$

ist ψ für alle $y \in C([t_0, t_1])$ stets Fréchet-differenzierbar und $\psi'(y)$ ist unabhängig von der Wahl von y der identische Operator. Außerdem erhält man für beliebige $h \in C([t_0, t_1])$ aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von g:

$$\begin{aligned}
\varphi(y + h) - \varphi(y) &= \int_{t_0}^{t_1} g(y(t) + h(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} g(y(t))dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [g(y(t) + h(t)) - g(y(t))]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{g}(y(t))h(t) + o(|h(t)|)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{g}(y(t))h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} o(|h(t)|)dt.
\end{aligned}$$

Da für jedes $t \in [t_0, t_1]$ der Ausdruck $o(|h(t)|)$ schneller gegen 0 strebt als $\|h\| = \max_{s \in [t_0,t_1]} |h(s)|$, strebt das gesamte letzte Integral schneller gegen 0 als $\|h\|$, womit φ ebenfalls Fréchet-differenzierbar in jedem Punkt $y \in C([t_0, t_1])$ ist. Dabei gilt für die Fréchet-Ableitung $\varphi'(y)$ gerade

$$\forall h \in C([t_0,t_1]): \quad \varphi'(y)[h] = \int_{t_0}^{t_1} \dot{g}(y(t))h(t)dt.$$

Wendet man nun noch Lemma 2.5 an, so folgt für beliebige $u \in C([t_0, t_1])$

$$f'(u)[h] = (\psi'(u) \circ \varphi'(\psi(u)))[h] = \varphi'(u - \widehat{u})\big[\psi'(u)[h]\big] = \int_{t_0}^{t_1} \dot{g}(u(t) - \widehat{u}(t))h(t)dt$$

für alle $h \in C([t_0, t_1])$. Der so definierte Operator entspricht der Fréchet-Ableitung von f in u. $\square$.

Die in Beispiel 2.3 angegebene Gewichtsfunktion g hat die Aufgabe, starke Abweichungen der Steuerfunktion u von einer vorgegebenen (aber möglicherweise nicht zulässigen) Steuerfunktion $\widehat{u}$ schwerer zu wichten, als kleinere Abweichungen. Damit drückt f gerade aus, dass das angegebene Kontrollsystem so durch u zu steuern ist, dass eine vorgegebene Strategie $\widehat{u}$ möglichst wenig modifiziert wird. Da insbesondere $g(0) = 0$ gefordert wird, ist $f(\widehat{u}) = 0$, falls $\widehat{u}$ tatsächlich zulässig ist. Da f nur nichtnegative Werte annehmen kann, entspricht $\widehat{u}$ dann einem globalen Minimum von f, was auch rein intuitiv gesehen eine notwendige Eigenschaft von f sein sollte. Eine typische Gewichtsfunktion ist durch $g(t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.3 Kegel in der mathematischen Optimierung

Kegel spielen in der mathematischen Optimierung eine bedeutende Rolle. Im Folgenden werden zwei wesentliche Anwendungen von Kegeln vorgestellt, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigt werden. Zum einen sind dies sogenannte Ordnungskegel, die es erlauben, auch in (möglicherweise nicht endlichdimensionalen) abstrakten Räumen partielle Ordnungsrelationen zu definieren, um einzelne Punkte miteinander zu vergleichen. Zum anderen werden Tangentialkegel betrachtet, die eine Approximation des zulässigen Bereiches einer Optimierungsaufgabe erlauben, um notwendige Optimalitätsbedingungen zu formulieren.

Definition 2.5 *Es sei X ein beliebiger Raum. Eine partielle Ordnungsrelation $\varrho \subseteq X \times X$, d.h. eine reflexive ($i_X \subseteq \varrho$), antisymmetrische ($\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq i_X$) und transitive ($\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$) Relation auf X, heißt* **partielle Ordnung des Raumes** *X, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\forall w, x, y, z \in X\colon\ (w, x), (y, z) \in \varrho \longrightarrow (w + y, x + z) \in \varrho,$

(ii) $\forall x, y \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\colon\ (x, y) \in \varrho \longrightarrow (\alpha x, \alpha y) \in \varrho.$

Das Paar (X, ϱ) heißt dann partiell geordneter Raum.

Ist ϱ eine partielle Ordnung eines Raumes X, so muss ϱ keinesfalls linear sein. Das heißt, für je zwei Elemente $x, y \in X$ muss nicht zwangsläufig eine der Beziehungen $(x, y) \in \varrho$ oder $(y, x) \in \varrho$ gelten. Damit müssen nicht alle Punkte des Raumes X miteinander vergleichbar sein. Versieht man beispielsweise den Raum $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen $\leqslant$-Relation σ, so ist $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ ein partiell geordneter Raum, jedoch sind die Vektoren $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$ bezüglich σ nicht vergleichbar. Die Probleme im Umgang mit partiell geordneten Räumen sind insbesondere ein Gegenstand der Vektoroptimierung.

Definition 2.6 *Es sei X ein beliebiger Raum. Ein Kegel $K \subseteq X$ heißt **spitz**, falls $K \cap (-K) = \{\mathfrak{o}_X\}$ gilt.*

Ein interessanter Sachverhalt ist dadurch gegeben, dass genau die nichtleeren, spitzen und konvexen Kegel eines Raumes X seine partiellen Ordnungen repräsentieren.

Lemma 2.6 *(vgl. Theorem D.3 in [3]) Es sei X ein beliebiger Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Ist ϱ eine partielle Ordnung des Raumes X, so ist die durch

$$K = \{x \in X | (\mathfrak{o}_X, x) \in \varrho\}$$

definierte Menge $K \subseteq X$ ein nichtleerer, spitzer und konvexer Kegel.

(ii) Ist K ein nichtleerer, spitzer und konvexer Kegel, so ist die durch

$$\varrho = \{(x, y) \in X \times X | y - x \in K\}$$

definierte Relation eine partielle Ordnung des Raumes X.

(iii) Ist C ein nichtleerer, spitzer und konvexer Kegel, ϱ die gemäß (ii) definierte Relation und K der gemäß (i) aus ϱ konstruierte Kegel, so gilt $K = C$.

Beweis:

(i) Da ϱ reflexiv ist, gilt $(\mathfrak{o}_X, \mathfrak{o}_X) \in \varrho$, also ist K nichtleer, da $\mathfrak{o}_X \in K$ gilt.
Ist $x \in K$, so gilt $(\mathfrak{o}_X, x) \in \varrho$. Wegen Bedingung (ii) in Definition 2.5 gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gerade $(\mathfrak{o}_X, \alpha x) = (\alpha \mathfrak{o}_X, \alpha x) \in \varrho$. Es folgt also $\alpha x \in K$. Da, wie oben gezeigt, $\mathfrak{o}_X \in K$ gilt, ist K ein Kegel.
Sind $x, y \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ beliebig gewählt, so gilt, da K ein Kegel ist, zunächst $\lambda x, (1-\lambda)y \in K$. Es folgt $(\mathfrak{o}_X, \lambda x), (\mathfrak{o}_X, (1-\lambda)y) \in \varrho$ nach Definition von K und wegen Bedingung (i) in Definition 2.5 erhält man sofort $(\mathfrak{o}_X, \lambda x + (1 - \lambda)y) \in \varrho$, also gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Damit ist K ein konvexer Kegel.
Sei $x \in K$ beliebig gewählt. Angenommen, es gilt $-x \in K$. Nach Definition erhält man dann $(\mathfrak{o}_X, x), (\mathfrak{o}_X, -x) \in \varrho$. Unter Ausnutzung der Bedingung (i) aus Definition 2.5 folgt insbesondere $(x, \mathfrak{o}_X) = (\mathfrak{o}_X + x, -x + x) \in \varrho$, da ϱ reflexiv ist. Wegen der Antisymmetrie von ϱ gilt wegen $(\mathfrak{o}_X, x), (x, \mathfrak{o}_X) \in \varrho$ gerade $x = \mathfrak{o}_X$, weshalb K ein spitzer Kegel ist.

(ii) Da K nichtleer ist, muss $\mathfrak{o}_X \in K$ nach Definition eines Kegels gelten. Da für beliebige $x \in X$ gerade $\mathfrak{o}_X = x - x$ gilt, folgt $(x, x) \in \varrho$, weshalb ϱ reflexiv ist. Es seien $(x, y), (y, x) \in \varrho$. Dann gilt $y - x, -(y - x) \in K$. Da K ein spitzer Kegel ist, gilt $y - x = \mathfrak{o}_X$, also $x = y$. Folglich ist ϱ antisymmetrisch.
Es gelte $(w, x), (y, z) \in \varrho$. Nach Definition von ϱ gilt dann $x - w, z - y \in K$. Da K eine konvexe Menge ist, gilt insbesondere $\frac{1}{2}((x + z) - (w + y)) = \frac{1}{2}(x - w) + \frac{1}{2}(z - y) \in K$. Wegen der Eigenschaft von K, Kegel zu sein, gilt dann auch $(x + z) - (w + y) = 2 \cdot \frac{1}{2}((x + z) - (w + y)) \in K$. Es folgt $(w + y, x + z) \in \varrho$, also erfüllt ϱ die Bedingung (i) aus Definition 2.5. Wählt man speziell $x = y$, so erhält man aus $(w, y), (y, z) \in \varrho$ gerade $(w+y, y+z) \in \varrho$. Wegen $(-y, -y) \in \varrho$ liefert nochmaliges Anwenden von Bedingung (i) aus Definition 2.5 $(w, z) = ((w + y) - y, (y + z) - y) \in \varrho$, also ist ϱ transitiv.
Sei $(x, y) \in \varrho$ beliebig gewählt. Dann gilt $y - x \in K$. Da K ein Kegel ist, gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$ auch $\alpha y - \alpha x = \alpha(y - x) \in K$. Es folgt $(\alpha x, \alpha y) \in \varrho$, also erfüllt ϱ auch Bedingung (ii) aus Definition 2.5.
Zusammenfassend ist ϱ eine partielle Ordnung des Raumes X.

(iii) [$\subseteq$] Sei $x \in K$. Nach (i) gilt dann $(\mathfrak{o}_X, x) \in \varrho$ und wegen (ii) folgt daraus $x = x - \mathfrak{o}_X \in C$.
[$\supseteq$] Sei $x \in C$. Angenommen, es gilt $x \notin K$, dann gilt mit (i) gerade $(\mathfrak{o}_X, x) \notin \varrho$ und aufgrund von (ii) erhält man $x = x - \mathfrak{o}_X \notin C$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, also gilt $x \in K$. #

Ein partiell geordneter Raum (Y, ϱ) kann nun dank Aussage (iii) von Lemma 2.6 äquivalent durch (Y, K) charakterisiert werden, wobei K der gemäß $K = \{x \in Y | (\mathfrak{o}_Y, x) \in \varrho\}$ definierte nichtleere, spitze und konvexe Kegel ist. Aus diesem Grund werden alle derartigen Kegel auch als Ordnungskegel bezeichnet. Handelt es sich bei X um einen weiteren Raum und ist $g\colon X \longrightarrow Y$ eine gegebene Abbildung, so kann die kaum gebräuchliche Schreibweise der Bedingung $(g(x), \mathfrak{o}_Y) \in \varrho$ äquivalent durch $\mathfrak{o}_Y - g(x) \in K$ oder kurz $g(x) \in -K$ ersetzt werden. Damit erschließt sich die tiefere Bedeutung der Optimierungsaufgabe (1.2).

Definition 2.7 *Es sei X ein beliebiger Raum und (Y, K) sei ein partiell geordneter Raum mit Ordnungskegel $K \subseteq Y$. Eine Abbildung $g\colon X \longrightarrow Y$ heißt K-**konvex**, falls für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ die folgende Bedingung gilt:*

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda g(x) - (1 - \lambda)g(y) \in -K. \tag{2.4}$$

K-Konvexität stellt eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Konvexitätsprinzips in allgemeinen partiell geordneten Räumen dar. Insbesondere ist ein Funktional $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann konvex (im gewohnten Sinn) über dem Raum X, wenn f über X $\mathbb{R}_0^+$-konvex ist.
Es mögen die Voraussetzungen von Definition 2.7 gelten, $g\colon X \longrightarrow Y$ sei eine K-konvexe Abbildung und $M \subseteq X$ sei durch $M = \{x \in X | g(x) \in -K\}$ gegeben. Sind $x, y \in M$ und $\lambda \in [0, 1]$ beliebig gewählt, so gilt aufgrund der Eigenschaften von K gerade $\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \in -K$. Da g K-konvex ist, gilt ferner $g(\lambda x + (1 -$

$\lambda)y) - \lambda g(x) - (1-\lambda)g(y) \in -K$. Da $-K$ ein konvexer Kegel ist, gilt insbesondere $g(\lambda x+(1-\lambda)y) = [g(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(y)]+[\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)] \in -K$. Damit gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$, also ist M eine konvexe Menge.
Werden speziell Fréchet-differenzierbare Abbildungen betrachtet, so kann K-Konvexität äquivalent durch die Fréchet-Ableitung charakterisiert werden.

Lemma 2.7 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und Y sei durch einen Ordnungskegel $K \subseteq Y$ partiell geordnet. Ferner sei $g\colon X \longrightarrow Y$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung. Dann ist g genau dann K-konvex, wenn für alle $x, y \in X$ die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$g(y) + g'(y)[x-y] - g(x) \in -K.$$

Beweis:
[$\Longrightarrow$] Sei g K-konvex. Dann gilt für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in [0,1]$ wegen (2.4):

$$g(y + \lambda(x-y)) - g(y) - \lambda(g(x) - g(y)) \in -K.$$

Andererseits ist g in y auch Fréchet-differenzierbar, womit wegen (2.2) und (2.3) eine Abbildung $o\colon \mathbb{R} \longrightarrow Y$ mit $\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{o(\lambda)}{\lambda} = \mathfrak{o}_Y$ und

$$g(y + \lambda(x-y)) - g(y) = g'(y)[\lambda(x-y)] + \|x-y\|_X \cdot o(\lambda)$$

existieren muss. Setzt man diese Gleichung in die obige alternative Charakterisierung der K-Konvexität ein, so folgt:

$$g'(y)[\lambda(x-y)] + \|x-y\|_X \cdot o(\lambda) - \lambda(g(x) - g(y)) \in -K.$$

Da $\|x-y\|_X$ konstant ist, folgt nach Division durch λ (λ ist nichtnegativ und $-K$ ist ein Kegel), Grenzübergang $\lambda \searrow 0$ und anschließendem Umordnen die Beziehung

$$g(y) + g'(y)[x-y] - g(x) \in -K.$$

[$\Longleftarrow$] Es seien $x, y \in X$ sowie $\lambda \in [0,1]$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Voraussetzung mit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$:

$$g(z) + g'(z)[x-z] - g(x) \in -K \qquad g(z) + g'(z)[y-z] - g(y) \in -K.$$

Mit der Definition von z folgt sofort:

$$g(z) + (1-\lambda)g'(z)[x-y] - g(x) \in -K \qquad g(z) + \lambda g'(z)[y-x] - g(y) \in -K.$$

Multipliziert man den ersten Term mit λ und den zweiten Term mit $1-\lambda$, so sind die entsprechenden Elemente weiterhin in $-K$ enthalten, da diese Menge ein Kegel ist. Da $-K$ als Ordnungskegel auch konvex ist, gilt insbesondere:

$$\lambda(g(z) + (1-\lambda)g'(z)[x-y] - g(x)) + (1-\lambda)(g(z) + \lambda g'(z)[y-x] - g(y)) \in -K.$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man $g(z) - \lambda g(x) - (1-\lambda)g(y) \in -K$. Da $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ gilt, und $x, y \in X$ sowie $\lambda \in [0,1]$ beliebig gewählt wurden, muss g K-konvex sein. $\quad\#$

Das in Beispiel 2.3 definierte Funktional $f\colon C([t_0,t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}_0^+$-konvex (also konvex im üblichen Sinne), falls die Gewichtsfunktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ konvex ist. Da f Fréchet-differenzierbar ist, würde nämlich aus der Konvexität von g für $u, v \in C([t_0,t_1])$ und $\tilde{u} := u - \widehat{u}$ sowie $\tilde{v} := v - \widehat{u}$ die folgende Abschätzung folgen:

$$\begin{aligned}
&f(u) + f'(u)[v-u] - f(v)\\
&\quad = \int_{t_0}^{t_1} g(u(t)-\widehat{u}(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{g}(u(t)-\widehat{u}(t))(v(t)-u(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} g(v(t)-\widehat{u}(t))dt\\
&\quad = \int_{t_0}^{t_1} \big[g(\tilde{u}(t)) + \dot{g}(\tilde{u}(t))(v(t)-u(t)) - g(\tilde{v}(t))\big]\,dt\\
&\quad = \int_{t_0}^{t_1} \big[g(\tilde{u}(t)) + \dot{g}(\tilde{u}(t))(\tilde{v}(t)-\tilde{u}(t)) - g(\tilde{v}(t))\big]\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} 0\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Dies ist nach Lemma 2.7 gleichbedeutend mit der $\mathbb{R}_0^+$-Konvexität von f.

Definition 2.8 *Es sei X ein beliebiger Raum und $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge dieses Raumes. Dann heißt die Menge*

$$A^D = \{f \in X^* | \forall x \in A\colon\ \langle x, f\rangle \geqslant 0\}$$

***Dualkegel** der Menge A.*

Das Konzept des Dualkegels ist in der Optimierung bei der Formulierung von Optimalitätsbedingungen hilfreich. Außerdem können derartige Kegel genutzt werden, um einem partiell geordneten Raum (X, K) einen partiell geordneten Dualraum (X^*, K^D) zuzuordnen, falls $\operatorname{int}(K) \neq \varnothing$ erfüllt ist. Einige wesentliche Eigenschaften von Dualkegeln finden sich im folgenden Lemma.

Lemma 2.8 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum.*

(i) Ist $A \subseteq X$ eine nichtleere Menge, so ist $A^D \subseteq X^*$ ein nichtleerer, konvexer und abgeschlossener Kegel.

(ii) Ist (X, K) ein partiell geordneter Raum und gilt $\operatorname{int}(K) \neq \varnothing$, so ist auch (X^*, K^D) ein partiell geordneter Raum.

Beweis:

(i) Die Menge A^D ist nichtleer, da insbesondere $f = \mathfrak{o}_{X^*}$ nach Definition ein Element von A^D ist. Ferner ist A^D ein Kegel, da aus $f \in A^D$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gerade $\langle x, \alpha f\rangle = \alpha \cdot \langle x, f\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in A$ folgt und somit $\alpha f \in A^D$ gilt. Dieser Kegel ist konvex, da für $f, g \in A^D$ und $\lambda \in [0,1]$ sofort $\langle x, \lambda f + (1-\lambda) g\rangle = \lambda \cdot \langle x, f\rangle + (1-\lambda) \cdot \langle x, g\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in A$ und damit $\lambda f + (1-\lambda) g \in A^D$ gilt. Ist $(f_n) \subseteq A^D$ eine gegen $f \in X^*$ konvergente Folge, so gilt für jedes Element $x \in A$ gerade $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, f_n\rangle \geqslant 0$, da (f_n) aufgrund der Definition der Dualnorm $\|\cdot\|_X^*$ insbesondere punktweise gegen f konvergieren muss. Damit gilt $f \in A^D$, also ist diese Menge abgeschlossen.

(ii) Wegen (i) ist lediglich zu zeigen, dass K^D ein spitzer Kegel ist. Angenommen, es existiert ein Funktional $f \in K^D$ mit $-f \in K^D$. Dann gilt für alle $x \in K$ gerade $\langle x, f\rangle \geqslant 0$ und $\langle x, -f\rangle \geqslant 0$, also $\langle x, f\rangle = 0$. Sei $\widehat{x} \in \operatorname{int}(K)$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\widehat{x} + \varepsilon d \in K$ und damit $\langle \widehat{x} + \varepsilon d, f\rangle = 0$ für alle $d \in S_X$ gilt. Insbesondere gilt für ein beliebiges $d \in S_X$ gerade $\widehat{x} + \varepsilon d, \widehat{x} - \varepsilon d \in K$. Damit erhält man für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ aufgrund der Linearität von f:

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{x} + \varepsilon d, \alpha f\rangle = 0 = \langle \widehat{x} - \varepsilon d, \alpha f\rangle \\
&\quad\longleftrightarrow \langle \widehat{x}, \alpha f\rangle + \langle \varepsilon d, \alpha f\rangle = \langle \widehat{x}, \alpha f\rangle + \langle -\varepsilon d, \alpha f\rangle \\
&\quad\longleftrightarrow \alpha \cdot \langle \widehat{x}, f\rangle + \varepsilon\alpha \cdot \langle d, f\rangle = \alpha \cdot \langle \widehat{x}, f\rangle - \varepsilon\alpha \cdot \langle d, f\rangle \\
&\quad\longleftrightarrow \varepsilon \cdot \langle \alpha d, f\rangle = -\varepsilon \cdot \langle \alpha d, f\rangle \\
&\quad\longleftrightarrow \langle \alpha d, f\rangle = \langle \alpha d, -f\rangle.
\end{aligned}$$

Wegen $\{\alpha d | \alpha \in \mathbb{R},\, d \in S_X\} = X$ gilt für alle $x \in X$ gerade $\langle x, f\rangle = \langle x, -f\rangle$. Es folgt $f = \mathfrak{o}_{X^*}$, womit K^D ein spitzer Kegel sein muss. #

Im Beweis von (ii) wird deutlich, dass die Eigenschaft von K^D, ein spitzer Kegel zu sein, unabhängig davon ist, ob K ein spitzer Kegel ist. Allerdings ist die Bedingung $\operatorname{int}(K) \neq \varnothing$ hierfür hinreichend. Betrachtet man beispielsweise den partiell geordneten Raum $(\mathbb{R}^2, K)$ mit $K = \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ (es gilt $\operatorname{int}(K) = \varnothing$), so ergibt sich $K^D = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, doch dieser Kegel ist nicht spitz. Damit kann es sich bei $(\mathbb{R}^2, K^D)$ nicht um einen partiell geordneten Raum handeln.
Betrachtet sei außerdem der Raum $L_2([0,1])$. Dieser wird durch den Kegel

$$K = \{u \in L_2([0,1]) | \forall t \in [0,1] \colon u(t) \geqslant 0\} \tag{2.5}$$

partiell geordnet. Problematisch ist dabei, dass $\operatorname{int}(K) = \varnothing$ gilt. Beispielsweise (vgl. Beispiel nach Satz 6.1 in [5]) ist $u \equiv 1$ kein innerer Punkt von K, da mit der gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \forall t \in [0,1] \colon \quad u_n(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right) \\ -1 & ; \quad t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

definierten Folge (u_n) gerade $\|u - u_n\| = \frac{2}{\sqrt{n}}$ gilt. Damit sind in jeder Umgebung von u unendliche viele Folgenglieder von (u_n) enthalten, es gilt jedoch $(u_n) \cap K = \varnothing$. Bildet man den Dualkegel K^D zu K, so erhält man:

$$K^D = \left\{u \in L_2([0,1]) | \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0,1]} u(t) \geqslant 0\right\}.$$

Dieser Kegel ist offenbar nicht spitz, da beispielsweise für $u = \mathbb{I}_{\{1\}}$ gerade $u, -u \in K^D$ gilt. Wegen $L_2([0,1])^* = L_2([0,1])$ ist dann $(L_2([0,1]), K^D)$ kein partiell geordneter Raum. Nach Lemma 2.6 muss demnach tatsächlich $\operatorname{int}(K) = \varnothing$ gelten.
Bei der Betrachtung von restringierten Optimierungsaufgaben ist es oftmals bedeutend, den zulässigen Bereich lokal zu approximieren (z.B. durch Linearisierung), um Optimalitätsbedingungen zu formulieren. Eine Möglichkeit hierzu besteht darin, auf das Prinzip des Tangentenkegels zurückzugreifen.

Definition 2.9 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $M \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge dieses Raumes und $\widehat{x} \in M$ ein Element dieser Menge. Eine Richtung $d \in X$ heißt tangential an M bezüglich $\widehat{x}$, falls eine (bezüglich $\|\cdot\|_X$) gegen d konvergente Folge $(d_n) \subseteq X$ und eine (bezüglich $|\cdot|$) gegen 0 konvergente Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ existieren, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade $\widehat{x} + t_n d_n \in M$ gilt. Die Menge aller an M tangentialen Richtungen bezüglich $\widehat{x}$ heißt* ***Tangentenkegel*** *und wird mit $\mathcal{T}_M(\widehat{x})$ bezeichnet.*

Die wesentlichen Eigenschaften des Tangentenkegels können dem folgenden Lemma entnommen werden.

Lemma 2.9 *(vgl. Theoreme 4.10, 4.12 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $M \subseteq X$ sei eine beliebige nichtleere Menge und es gelte $\widehat{x} \in M$. Dann ist die Menge $\mathcal{T}_M(\widehat{x})$ ein abgeschlossener Kegel. Handelt es sich bei M um eine konvexe Menge, so ist $\mathcal{T}_M(\widehat{x})$ überdies konvex.*

Der Beweis dieses Lemmas verläuft analog zum endlichdimensionalen Fall und wird deshalb an dieser Stelle ausgespart.
Obwohl der Tangentenkegel ein hilfreiches Konzept in der Optimierung darstellt, wird er oftmals ob seiner unhandlichen Definition nicht verwendet. Stattdessen wird in dem Fall, dass die zu Grunde liegende Menge explizit durch gewisse Abbildungen modelliert wird, versucht, gute Approximationen dieses Kegels durch Linearisierung besagter Abbildungen zu erzeugen. Dies erweist sich in der hier betrachteten abstrakten Optimierung als deutlich schwieriger, als im endlichdimensionalen Fall.

Definition 2.10 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $h\colon X \longrightarrow Z$ sei in $\widehat{x} \in X$ Fréchet-differenzierbar und $M \subseteq X$ sei die gemäß $M = \{x \in X | h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$ definierte Menge. Gilt $\widehat{x} \in M$, so heißt*

$$\mathcal{L}_M(\widehat{x}) = \{d \in X | h'(\widehat{x})[d] = \mathfrak{o}_Z\}$$

linearisierter Tangentenkegel *an M in $\widehat{x}$.*

Die Eigenschaften des linearisierten Tangentenkegels sowie die Beziehungen zwischen Tangentenkegel und linearisiertem Tangentenkegel sind dem folgenden Lemma zu entnehmen.

Lemma 2.10 *(vgl. Theoreme 4.21, 4.22 in [3]) Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $h\colon X \longrightarrow Z$ sei eine gegebene Abbildung und $M \subseteq X$ sei die gemäß $M = \{x \in X | h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$ definierte Menge. Ferner sei h in $\widehat{x} \in M$ Fréchet-differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\mathcal{L}_M(\widehat{x})$ *ist ein abgeschlossener und konvexer Kegel.*

(ii) $\mathcal{T}_M(\widehat{x}) \subseteq \mathcal{L}_M(\widehat{x})$

(iii) *Ist h in einer Umgebung von $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar, $h'(\widehat{x})$ ein surjektiver Operator und die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ in $\widehat{x}$ stetig, so gilt $\mathcal{T}_M(\widehat{x}) = \mathcal{L}_M(\widehat{x})$.*

Beweis:

(i) Es sei $(d_n) \subseteq \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ eine gegen $d \in X$ konvergente Folge. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit des Operators $h'(\widehat{x})$ gerade $h'(\widehat{x})[d] = h'(\widehat{x})\,[\lim_{n\to\infty} d_n] = \lim_{n\to\infty} h'(\widehat{x})[d_n] = \mathfrak{o}_Z$, also muss ebenfalls $d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ erfüllt sein.
Für $d_1, d_2 \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt ferner aufgrund der Linearität von $h'(\widehat{x})$

$$h'(\widehat{x})[\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2] = \lambda h'(\widehat{x})[d_1] + (1-\lambda)h'(\widehat{x})[d_2] = \mathfrak{o}_Z.$$

Damit folgt $\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2 \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$, also ist $\mathcal{L}_M(\widehat{x})$ konvex.
Ebenfalls aus der Linearität von $h'(\widehat{x})$ folgt für beliebige $d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gerade $h'(\widehat{x})[\alpha d] = \alpha h'(\widehat{x})[d] = \mathfrak{o}_Z$, womit $\alpha d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ gezeigt ist. Insbesondere ist $\mathcal{L}_M(\widehat{x})$ damit ein Kegel.

(ii) Es sei $d \in \mathcal{T}_M(\widehat{x}) \setminus \{\mathfrak{o}_X\}$ (es gilt trivial $\mathfrak{o}_X \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$). Nach Definition existieren dann eine Folge $(d_n) \subseteq X$, die (bezüglich $\|\cdot\|_X$) gegen d konvergiert, und eine Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, die (bezüglich $|\cdot|$) gegen 0 konvergiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade $h(\widehat{x} + t_n d_n) = \mathfrak{o}_Z$ gilt. Damit erhält man aufgrund der Linearität und Stetigkeit des Operators $h'(\widehat{x})$:

$$\begin{aligned}
h'(\widehat{x})[d] &= h'(\widehat{x})\left[\lim_{n\to\infty} d_n\right] = \lim_{n\to\infty} h'(\widehat{x})[d_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} h'(\widehat{x})\,[t_n d_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\Big(h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x}) - \big(h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x}) - h'(\widehat{x})\,[t_n d_n]\,\big)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x})}{t_n} - \frac{h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x}) - h'(\widehat{x})[t_n d_n]}{t_n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x}) - h'(\widehat{x})[t_n d_n]}{t_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\|d_n\|_X \frac{h(\widehat{x}+t_n d_n) - h(\widehat{x}) - h'(\widehat{x})[t_n d_n]}{\|t_n d_n\|_X} = \mathfrak{o}_Z,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit direkt aus (2.3) folgt. Es gilt also $d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$.

(iii) Der Beweis ist ausführlich in [3] nachzulesen und wird hier ob seines erheblichen Umfangs weggelassen. #

Wegen *(i)* und *(ii)* des Lemmas erhält man insbesondere $\operatorname{conv}(\mathcal{T}_M(\widehat{x})) \subseteq \mathcal{L}_M(\widehat{x})$, da der linearisierte Tangentenkegel stets konvex ist.
Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, Y sei durch den Ordnungskegel $K \subseteq Y$ partiell geordnet, $g\colon X \longrightarrow Y$ sei eine gegebene Abbildung, $M \subseteq X$ sei die durch $M = \{x \in X | g(x) \in -K\}$ definierte Menge, $\widehat{x} \in M$ sei beliebig gewählt und g sei in $\widehat{x}$ Fréchet-differenzierbar. Dann liegt die Vermutung nahe, dass der Tangentenkegel $\mathcal{T}_M(\widehat{x})$ durch den Kegel $\widehat{\mathcal{L}}_M(\widehat{x}) = \{d \in X | g'(\widehat{x})[d] \in -K\}$ (bezüglich der Mengeninklusion nach oben) approximiert werden kann. Dass dieser Gedanke rasch verworfen werden muss, zeigen bereits einfache Beispiele.

Beispiel 2.4 *Es seien $f\colon C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \times C([0,1])$ und $g\colon C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch*

$$\forall u \in C([0,1])\colon \quad f(u) = \begin{pmatrix} u - u_o \\ u_u - u \end{pmatrix} \qquad g(u) = \int_0^1 (u(t))^2 dt$$

gegebenen Abbildungen, wobei $u_u, u_o \in C([0,1])$ *konstante Schrankenfunktionen* $u_u \equiv c$ *und* $u_o \equiv C$ *mit* $c, C \in \mathbb{R}$ *sowie* $c < C$ *sein mögen. Dann sind zwei Mengen* $M_f, M_g \subseteq C([0,1])$ *durch*

$$M_f = \{u \in C([0,1]) | g(u) \in (-K) \times (-K)\} \qquad M_g = \{u \in C([0,1]) | f(u) \leqslant 0\}$$

definiert, wobei $K \subseteq C([0,1])$ *der durch* $K = \{u \in C([0,1]) | \forall t \in [0,1]\colon u(t) \geqslant 0\}$ *gegebene Ordnungskegel ist.*
Zeigen Sie die Inklusionsbeziehungen $\mathcal{T}_{M_f}(u_u) \supset \widehat{\mathcal{L}}_{M_f}(u_u)$ *und* $\mathcal{T}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right) \subset \widehat{\mathcal{L}}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right)$.

Die Menge M_f besitzt aufgrund der Definition des Kegels K die folgende äquivalente Darstellung:

$$\begin{aligned} M_f &= \{u \in C([0,1]) | \forall t \in [0,1]\colon u_u(t) \leqslant u(t) \leqslant u_o(t)\} \\ &= \{u \in C([0,1]) | \forall t \in [0,1]\colon c \leqslant u(t) \leqslant C\}. \end{aligned}$$

Wegen $c < C$ und der Definition des Tangentenkegels gilt damit offensichtlich die Inklusion $\mathcal{T}_{M_f}(u_u) \supseteq K$. Sind $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und $(d_n) \subseteq C([0,1])$ beliebige Folgen mit $u_u + t_n d_n \in M_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muss $(d_n) \subseteq K$ gelten. Falls (d_n) gegen ein $d \in C([0,1])$ und (t_n) gegen 0 konvergieren sollten, so muss auch $d \in K$ gelten. Folglich gilt $\mathcal{T}_{M_f}(u_u) \subseteq K$. Wegen Obigem gilt insbesondere $\mathcal{T}_{M_f}(u_u) = K$.
Die Abbildung f ist in u_u Fréchet-differenzierbar und es gilt:

$$\forall d \in C([0,1])\colon \quad f'(u_u)[d] = \begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix}.$$

Nach Definition gilt $\widehat{\mathcal{L}}_{M_f}(u_u) = \{d \in C([0,1]) | f'(u_u)[d] \in (-K) \times (-K)\} = \{d \in C([0,1]) | d \in -K \wedge -d \in -K\}$. Da K ein spitzer Kegel ist, trifft dies auch auf $-K$ zu und man erhält $\widehat{\mathcal{L}}_{M_f}(u_u) = \{\mathfrak{o}_{C([0,1])}\}$. Folglich gilt $\mathcal{T}_{M_f}(u_u) \supset \widehat{\mathcal{L}}_{M_f}(u_u)$.
Da für alle $u \in C([0,1])$ gerade $(u(t))^2 \geqslant 0$ und damit $\int_0^1 (u(t))^2 dt \geqslant 0$ gilt, liegt u genau dann in M_g, wenn $u \equiv 0$, also $u = \mathfrak{o}_{C([0,1])}$, gilt. Es folgt $\mathcal{T}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right) = \left\{\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right\}$.
Nach Beispiel 2.3 ist g überall Fréchet-differenzierbar und es gilt:

$$\forall u \in C([0,1]) \forall d \in C([0,1])\colon \quad g'(u)[d] = 2 \int\limits_0^1 u(t) d(t) dt.$$

Insbesondere in $\mathfrak{o}_{C([0,1])}$ gilt also für beliebige $d \in C([0,1])$:

$$g'\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right)[d] = 2 \int\limits_0^1 0 \cdot d(t) dt = 0.$$

Damit folgt $\widehat{\mathcal{L}}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right) = \{d \in C([0,1]) | g'\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right)[d] \leqslant 0\} = C([0,1])$. Es gilt zusammenfassend $\mathcal{T}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right) \subset \widehat{\mathcal{L}}_{M_g}\left(\mathfrak{o}_{C([0,1])}\right)$. $\square$

3 Optimierung in normierten Räumen

3.1 Allgemeine Existenzresultate

Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $M \subseteq X$ sei nichtleer und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei ein gegebenes Funktional. Betrachtet wird die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ x &\in M \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit Zielfunktional f und zulässigem Bereich M. Es ist zunächst von zentralem Interesse, wann Optimierungsaufgaben der Form (3.1) überhaupt lösbar sind, d.h. globale Optimallösungen besitzen. Ein bekanntes doch im Unendlichdimensionalen kaum anwendbares Resultat bildet hierbei der Satz von Weierstraß.

Satz 3.1 ***(von Weierstraß)*** *(vgl. Theorem 2.3 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $M \subseteq X$ sei nichtleer und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei ein gegebenes Funktional.*

(i) Ist f unterhalbstetig und M kompakt, so ist (3.1) lösbar.

(ii) Ist f schwach unterhalbstetig und M schwach folgenkompakt, so ist (3.1) lösbar.

Beweis:

(i) Es sei $(x_n) \subseteq M$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{x\in M} f(x).$$

Da M kompakt ist, besitzt (x_n) eine gegen $\widehat{x} \in M$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Da f unterhalbstetig ist, gilt ferner

$$f(\widehat{x}) \leqslant \liminf_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Insbesondere folgt wegen der Wahl der Folge (x_n) die Beziehung $f(\widehat{x}) = \inf_{x\in M} f(x)$, also muss $\widehat{x}$ eine globale Optimallösung von (3.1) sein.

(ii) Der Beweis verläuft analog zu (i), jedoch kann aus (x_n) nur eine schwach gegen $\widehat{x}$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}) ausgewählt werden. Da f jedoch als schwach unterhalbstetig vorausgesetzt wurde, ist $\widehat{x}$ dennoch eine globale Optimallösung von (3.1). #

Die Aussage (i) aus dem obigen Satz ist oftmals nicht anwendbar, da kompakte Mengen im Unendlichdimensionalen seltener vorkommen, oder sich die Kompaktheit einer Menge nicht ohne Weiteres verifizieren lässt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass in allgemeinen Räumen die Abgeschlossenheit und Beschränktheit einer Menge nicht hinreichend für deren Kompaktheit sind. Um ein anwendbares Existenzresultat formulieren zu können, muss also die Voraussetzung der Kompaktheit des

zulässigen Bereiches abgeschwächt werden. Dies geschieht, indem dieser als lediglich schwach folgenkompakt angenommen wird, d.h. jede Folge aus dem zulässigen Bereich muss lediglich eine schwach konvergente Teilfolge besitzen. Folgerichtig ist es ob der schwächeren Forderungen an den zulässigen Bereich notwendig, stärkere Voraussetzungen an das Zielfunktional zu stellen: dieses muss mindestens schwach unterhalbstetig sein, um eine analoge Aussage zum eigentlichen Satz von Weierstraß zu erhalten. Dass diese Eigenschaft stärker als gewöhnliche Unterhalbstetigkeit ist, wurde im Rahmen des Beispiels 2.2 illustriert.
Im Folgenden wird ein spezielles Existenzresultat vorgestellt, welches eine direkte Folgerung des obigen Satzes darstellt. Insbesondere werden also Forderungen an die Aufgabe (3.1) gestellt, unter denen f schwach unterhalbstetig und M schwach folgenkompakt ist.

Satz 3.2 *(vgl. Theorem 2.12 in [3]) Es sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein reflexiver Banachraum,* f *sei stetig sowie quasikonvex und* $M \subseteq X$ *sei nichtleer, abgeschlossen, beschränkt sowie konvex. Dann ist (3.1) lösbar.*

Beweis:
Nach Lemma 2.2 ist f schwach unterhalbstetig und nach Aussage (ii) von Lemma 2.3 ist M schwach folgenkompakt. Folglich ist die Aufgabe (3.1) wegen Aussage (ii) von Satz 3.1 lösbar. #

Im Folgenden soll ein umfangreiches Beispiel aus der mathematischen Kontrolltheorie präsentiert werden. Hierzu sind zunächst einige Vorbetrachtungen nötig.
Betrachtet wird ein lineares autonomes Kontrollsystem der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.2}$$

über einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Als Input des Systems sei eine Steuerfunktion $u\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ gegeben. Da die Funktion u im Allgemeinen nicht stetig sein muss, wird insbesondere $u \in L_2^k([t_0, t_1])$ vorausgesetzt. Dabei bezeichnet $L_2^k([t_0, t_1])$ den Raum aller Vektorfunktionen mit k Komponenten in $L_2([t_0, t_1])$ und Definitionsgebiet $[t_0, t_1]$. Versieht man $L_2^k([t_0, t_1])$ mit der gemäß

$$\forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in L_2^k([t_0, t_1])\colon \quad \|u\| = \max_{i=1,\dots,k} \|u_i\|_{L_2([t_0,t_1])}$$

definierten Norm, so ist $(L_2^k([t_0, t_1]), \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum, da sowohl $L_2([t_0, t_1])$, als auch $\mathbb{R}^k$, versehen mit der Maximumnorm, reflexive Banachräume sind.
Grundlegende Fragestellungen, die das Kontrollsystem (3.2) betreffen, umfassen die Probleme der Steuerbarkeit, der Stabilisierbarkeit und der Optimalsteuerung.
Unter der Steuerbarkeit von (3.2) versteht man die Eigenschaft, dass es zu allen $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ein $t_1 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $t_0 < t_1$ gibt, sodass mit einer zulässigen Steuerfunktion u die Lösung x von (3.2) gerade $x(t_1) = x_1$ erfüllt.
Das System (3.2) heißt stabilisierbar, sofern für jede Wahl von $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$

eine zulässige Steuerfunktion u gewählt werden kann, sodass für die Lösung x von (3.2) die folgende Grenzwertbedingung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathfrak{o}_{L_2^n([t_0,t_1])}.$$

Aus Sicht der Optimierung am interessantesten ist das Problem der Optimalsteuerung. Hierbei geht es um die Untersuchung von Optimierungsaufgaben der Form

$$\begin{aligned} F(x,u) &\to \min_{x,u} \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= \quad x_0 \\ u &\in M \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit einem Funktional $F\colon L_2^n([t_0,t_1]) \times L_2^k([t_0,t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einer Menge $M \subseteq L_2^k([t_0,t_1])$. Die Ziele, welche durch F modelliert werden können, sind vielfältig. So ist es beispielsweise möglich, das Erreichen eines Idealzustandes bzw. die Verwendung einer Idealkontrolle zu forcieren oder die Norm von u, also den Steuerungsaufwand, zu minimieren.

Lemma 3.1 *(vgl. Kapitel 3.4 in [1]) Für jede Steuerfunktion $u \in L_2^k([t_0,t_1])$ ist die allgemeine Lösung von (3.2) gegeben durch:*

$$\forall t \in [t_0,t_1]\colon \quad x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Dabei ist das Integral komponentenweise zu verstehen und e^{tA} die gemäß

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{6}t^3A^3 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \dots$$

definierte Matrixexponentialfunktion.

In der Aufgabe (3.3) wird kein konkreter Endzustand x_1, sondern nur eine konkrete Endzeit t_1 fixiert. Damit nimmt die Zielfunktion in (3.3) schlicht eine Bewertung der zu einer zulässigen Steuerfunktion $u \in M$ gehörenden Lösung x des linearen autonomen Kontrollsystems (3.2) vor, wobei zusätzlich auch der Steuerungsaufwand berücksichtigt werden kann. Um im Folgenden die Wohldefiniertheit der besagten Lösung x zu gewährleisten, seien die Integrationskonstanten aus der Lösungsformel in Lemma 3.1 komponentenweise auf 0 fixiert. Ferner sei das System (3.2) selbst als steuerbar vorausgesetzt. Nach dem Satz von Kalman (vgl. Theorem 4.1 in [1]) ist dies genau dann der Fall, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$S = \big(B\,\big|AB\,\big|\dots\big|A^{n-1}B\big)$$

des Systems (3.2) den Rang n besitzt. Damit kann jeder beliebige Endzustand $x_1 \in \mathbb{R}^n$ für hinreichend große t_1 und eine geeignete Kontrollfunktion u erreicht werden. Für eine tiefgängigere Einführung in die Kontrolltheorie sei hier auf [1] verwiesen.

Beispiel 3.1 *(vgl. Problem 2.22 in [3], Beispiel 2.3) Betrachtet wird das lineare autonome Kontrollsystem (3.2). Gegeben seien konvexe und stetige Funktionen* $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *und* $h\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *mit* $g(\mathfrak{o}) = h(\mathfrak{o}) = 0$*, wobei* h *Lipschitz-stetig sein möge. Ferner seien* $\widehat{x} \in L_2^n([t_0, t_1])$ *bzw.* $\widehat{u} \in L_2^k([t_0, t_1])$ *ein Idealzustand bzw. eine Idealsteuerung. Dann wird durch*

$$\forall x \in L_2^n([t_0,t_1]) \forall u \in L_2^k([t_0,t_1])\colon\ F(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[g(x(t) - \widehat{x}(t)) + h(u(t) - \widehat{u}(t)) \Big] dt$$

ein Funktional $F\colon L_2^n([t_0,t_1]) \times L_2^k([t_0,t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert. Außerdem sei die Menge* $M \subseteq L_2^k([t_0,t_1])$ *gemäß* $M = B_{L_2^k([t_0,t_1])}$ *gegeben. Zeigen Sie, dass die Optimalsteueraufgabe (3.3) lösbar ist.*

Zunächst ist M als Einheitskugel des reflexiven Banachraumes $L_2^k([t_0,t_1])$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex.
Mittels Lemma 3.1 kann der Zustand x als Lösung des linearen Kontrollsystems (3.2) aus dem Zielfunktional F eliminiert werden. Es genügt wegen Satz 3.2 zu zeigen, dass das durch

$$f(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[g\left(e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau - \widehat{x}(t) \right) + h(u(t) - \widehat{u}(t)) \right] dt$$

für alle $u \in L_2^k([t_0,t_1])$ definierte Funktional $f\colon L_2^k([t_0,t_1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und quasikonvex über M ist. Dann ist nämlich das Optimalsteuerproblem lösbar.
Hierfür wurde der lineare Operator $T\colon L_2^k([t_0,t_1]) \longrightarrow L_2^n([t_0,t_1])$, welcher gemäß

$$\forall u \in L_2^k([t_0,t_1])\colon \quad T(u)[t] = \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

definiert ist, untersucht. An dieser Stelle genügt es zu wissen, dass T ein beschränkter und damit stetiger (vgl. Satz II.1.2 in [6]) linearer Operator ist. Der äußerst technische Beweis findet sich im Anhang B.
Es seien $u_1, u_2 \in L_2^k([t_0,t_1])$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig gewählt. Dann gilt wegen der Konvexität von g und h und der Linearität von T:

$$\begin{aligned}
&f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big[g\left(e^{(t-t_0)A}x_0 + T(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)[t] - \widehat{x}(t) \right) \\
&\qquad + h((\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)(t) - \widehat{u}(t)) \Big] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big[g\Big(\lambda \left(e^{(t-t_0)A}x_0 + T(u_1)[t] - \widehat{x}(t) \right) \\
&\qquad + (1-\lambda) \left(e^{(t-t_0)A}x_0 + T(u_2)[t] - \widehat{x}(t) \right) \Big) \\
&\qquad + h\big(\lambda(u_1(t) - \widehat{u}(t)) + (1-\lambda)(u_2(t) - \widehat{u}(t))\big) \Big] dt
\end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[\lambda g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u_1)[t] - \widehat{x}(t) \right) + \lambda h(u_1(t) - \widehat{u}(t))$$

$$+ (1-\lambda) g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u_2)[t] - \widehat{x}(t) \right) + (1-\lambda) h(u_2(t) - \widehat{u}(t)) \Big] dt$$

$$= \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2).$$

Folglich ist das Funktional f konvex und damit insbesondere quasikonvex.
Es verbleibt zu zeigen, dass f auch stetig über M ist. Sei hierzu $(u^l) \subseteq M$ eine gegen $u \in M$ konvergente Folge. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ mögen $u_1^l, \ldots, u_k^l$ die Komponentenfunktionen von u^l sein. Außerdem seien $u_1, \ldots, u_k$ die Komponentenfunktionen von u. Aufgrund der Stetigkeit des Operators T und der Funktion g gilt:

$$\lim_{l \to \infty} g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u^l)[t] - \widehat{x}(t) \right) = g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u)[t] - \widehat{x}(t) \right).$$

Es sei $L > 0$ die Lipschitzkonstante der Funktion h. Damit erhält man durch Anwendung der Hölderungleichung:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} |h\big(u^l(t) - \widehat{u}(t)\big) - h\big(u(t) - \widehat{u}(t)\big)| dt$$

$$\leqslant L \cdot \int\limits_{t_0}^{t_1} \|u^l(t) - u(t)\| dt = L \cdot \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{k} |u_j^l(t) - u_j(t)| dt$$

$$= L \cdot \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_0}^{t_1} |u_j^l(t) - u_j(t)| dt \leqslant L \cdot \sum_{j=1}^{k} \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} |u_j^l(t) - u_j(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= L \cdot \sqrt{t_1 - t_0} \cdot \sum_{j=1}^{k} \|u_j^l - u_j\|_{L_2([t_0,t_1])}$$

$$\leqslant L \cdot k \cdot \sqrt{t_1 - t_0} \cdot \max_{j=1,\ldots,k} \|u_j^l - u_j\|_{L_2([t_0,t_1])}$$

$$= L \cdot k \cdot \sqrt{t_1 - t_0} \cdot \|u^l - u\|_{L_2^k([t_0,t_1])}.$$

Zusammenfassend folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, welcher wegen der Stetigkeit von g und der Beschränktheit von T anwendbar ist:

$$\lim_{l \to \infty} |f(u^l) - f(u)|$$

$$= \lim_{l \to \infty} \Bigg| \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u^l)[t] - \widehat{x}(t) \right) - g \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + T(u)[t] - \widehat{x}(t) \right) \right] dt$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[h(u^l(t) - \widehat{u}(t)) - h(u(t) - \widehat{u}(t)) \right] dt \Bigg|$$

$$\leqslant \lim_{l\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left| g\left(e^{(t-t_0)A}x_0 + T(u^l)[t] - \widehat{x}(t)\right) - g\left(e^{(t-t_0)A}x_0 + T(u)[t] - \widehat{x}(t)\right)\right| dt$$

$$+ \lim_{l\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left| h(u^l(t) - \widehat{u}(t)) - h(u(t) - \widehat{u}(t)) \right| dt$$

$$\leqslant L \cdot k \cdot \sqrt{t_1 - t_0} \cdot \lim_{l\to\infty} \|u^l - u\|_{L_2^k([t_0,t_1])} = 0.$$

Damit ist das Funktional f über M stetig.
Insgesamt erfüllt das betrachtete Optimalsteuerproblem alle in Satz 3.2 gestellten Bedingungen, also muss diese Aufgabe folglich eine optimale Lösung besitzen. □

3.2 Optimalitäts- und Regularitätsbedingungen

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes Funktional. Zunächst soll hier die unrestringierte Optimierungsaufgabe

$$f(x) \to \min \tag{3.4}$$

untersucht werden. Da X mit einer Norm versehen ist, können in Analogie zum gewohnten Fall ($X = \mathbb{R}^n$) die Begriffe lokales Minimum und globales Minimum von (3.4) definiert werden.

Satz 3.3 *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei Fréchet-differenzierbar über X.*

(i) Ist $\widehat{x} \in X$ ein lokales Minimum von (3.4), so gilt $f'(\widehat{x})[d] = 0$ für alle $d \in X$.

(ii) Ist f $\mathbb{R}_0^+$-konvex über X und gilt für einem Punkt $\widehat{x} \in X$ gerade $f'(\widehat{x})[d] = 0$ für alle $d \in X$, so ist $\widehat{x}$ globales Minimum von (3.4).

Beweis:

(i) Da $\widehat{x}$ ein lokales Minimum von (3.4) ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\alpha \in [0, \varepsilon]$ und alle $d \in S_X$ gerade $f(\widehat{x} + \alpha d) \geqslant f(\widehat{x})$ gilt. Andererseits ist f Fréchet-differenzierbar, also existiert eine Funktion $o\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{\alpha\searrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$ und

$$f(\widehat{x} + \alpha d) - f(\widehat{x}) = f'(\widehat{x})[\alpha d] + \|d\|_X \cdot o(\alpha).$$

Sei nun $d \in S_X$ beliebig. Dann gilt aufgrund der Linearität des Operators $f'(\widehat{x})$ und der Eigenschaft von $\widehat{x}$, lokales Minimum zu sein:

$$f'(\widehat{x})[d] = \lim_{\alpha\searrow 0} \left(\frac{f'(\widehat{x})[\alpha d]}{\alpha} + \|d\|_X \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{f(\widehat{x} + \alpha d) - f(\widehat{x})}{\alpha} \geqslant 0.$$

Andererseits gilt wegen $-d \in S_X$ auch $f'(\widehat{x})[-d] \geqslant 0$, also insgesamt $f'(\widehat{x})[d] = 0$. Ferner folgt wegen der Linearität von $f'(\widehat{x})$ sofort auch $f'(\widehat{x})[\tau d] = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Da $d \in S_X$ beliebig gewählt wurde, muss sogar $f'(\widehat{x})[d] = 0$ für alle $d \in X$ gelten.

(ii) Wegen Lemma 2.7 gilt aufgrund der $\mathbb{R}_0^+$-Konvexität von f für alle $x \in X$:

$$f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] - f(x) \in -\mathbb{R}_0^+.$$

Damit ist die Ungleichung $f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] - f(x) \leqslant 0$ für alle $x \in X$ erfüllt. Nach Voraussetzung gilt $f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] = 0$ für alle $x \in X$, also ist die obige Ungleichung äquivalent zu $f(\widehat{x}) \leqslant f(x)$. Da diese Bedingung für alle $x \in X$ erfüllt ist, muss $\widehat{x}$ ein globales Minimum von (3.4) sein. #

Oftmals sind Optimierungsaufgaben restringiert und besitzen die Form (3.1). In diesem Fall kann der in Kapitel 2.3 definierte Tangentenkegel genutzt werden, um eine notwendige Optimalitätsbedingung zu formulieren.

Satz 3.4 *(vgl. Theorem 4.14 in [3]) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $M \subseteq X$ nichtleer, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes und über einer offenen Obermenge von M Fréchet-differenzierbares Funktional sowie $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.1). Dann gilt $f'(\widehat{x})[d] \geqslant 0$ für alle $d \in \mathcal{T}_M(\widehat{x})$.*

Beweis:
Für $\mathfrak{o}_X \in \mathcal{T}_M(\widehat{x})$ ist die Aussage trivial. Sei also $d \in \mathcal{T}_M(\widehat{x})$ mit $d \neq \mathfrak{o}_X$ beliebig gewählt. Dann existiert eine (bezüglich $\|\cdot\|_X$) gegen d konvergente Folge $(d_n) \subseteq X$ und eine (bezüglich $|\cdot|$) gegen 0 konvergente Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, sodass $\widehat{x} + t_n d_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geqslant n_0$ gerade $f(\widehat{x} + t_n d_n) \geqslant f(\widehat{x})$ gilt, da $\widehat{x}$ ein lokales Minimum von (3.1) ist. Da $f'(\widehat{x})$ ein linearer und stetiger Operator ist, gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
f'(\widehat{x})[d] &= f'(\widehat{x}) \left[\lim_{n\to\infty} d_n\right] = \lim_{n\to\infty} f'(\widehat{x})\,[d_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} f'(\widehat{x})\,[t_n d_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\Big(f(\widehat{x} + t_n d_n) - f(\widehat{x}) - \big(f(\widehat{x} + t_n d_n) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})\,[t_n d_n]\,\big)\Big) \\
&\geqslant - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\Big(f(\widehat{x} + t_n d_n) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[t_n d_n]\Big) \\
&= - \lim_{n\to\infty} \|d_n\|_X \cdot \frac{f(\widehat{x} + t_n d_n) - f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x})[t_n d_n]}{\|t_n d_n\|_X} = 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus (2.3). #

Kann die Menge M durch eine Gleichungsnebenbedingung bezüglich einer explizit gegebenen Fréchet-differenzierbaren Abbildung beschrieben werden, so ist es unter gewissen Bedingungen möglich, sogar auf den linearisierten Tangentenkegel zurückzugreifen, um notwendige Optimalitätsbedingungen zu formulieren.

Satz 3.5 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h\colon X \longrightarrow Z$ seien Fréchet-differenzierbare Abbildungen und es gelte $M = \{x \in X | h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$.*

(i) Ist $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.1), der Operator $h'(\widehat{x})$ surjektiv und die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ in $\widehat{x}$ stetig, so gilt $f'(\widehat{x})[d] \geqslant 0$ für alle $d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$.

(ii) *Ist f $\mathbb{R}_0^+$-konvex sowie h linear, und gilt für alle $d \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ gerade $f'(\widehat{x})[d] \geqslant 0$, so ist $\widehat{x}$ globales Minimum von (3.1).*

Beweis:

(i) Die Aussage folgt, da mit Lemma 2.10 und den geforderten Voraussetzungen $\mathcal{T}_M(\widehat{x}) = \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ gilt, sofort aus Satz 3.4.

(ii) Da h Fréchet-differenzierbar ist, muss h insbesondere stetig sein. Dann gilt für alle $d \in X$ gerade $h'(\widehat{x})[d] = h(d)$ (vgl. Betrachtungen nach Definition 2.4) und folglich $M = \mathcal{L}_M(\widehat{x})$. Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt $x - \widehat{x} \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$, da $h'(\widehat{x})[x-\widehat{x}] = h(x-\widehat{x}) = h(x) - h(\widehat{x}) = \mathfrak{o}_Z$ erfüllt ist. Da f $\mathbb{R}_0^+$-konvex und Fréchet-differenzierbar ist, erhält man mit Lemma 2.7 und den Voraussetzungen des Satzes die Abschätzung

$$0 \geqslant f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})[x-\widehat{x}] - f(x) \geqslant f(\widehat{x}) - f(x).$$

Da $x \in M$ beliebig gewählt wurde, muss $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ für alle $x \in M$ gelten, also ist $\widehat{x}$ globales Minimum von (3.1). #

Es sei speziell eine stetig differenzierbare Abbildung $h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k \leqslant n$ gewählt. Dann ist $h'(\widehat{x}) = \nabla h(\widehat{x})$ für ein $\widehat{x} \in M$ genau dann surjektiv, wenn der Rang der Matrix $\nabla h(\widehat{x})$ gleich k ist. Da $\nabla h(\widehat{x})$ zeilenweise die Gradienten der Komponentenfunktionen von h in $\widehat{x}$ enthält, ist dies gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit der besagten Gradienten. Dies entspricht der Gültigkeit der bekannten Regularitätsbedingung LICQ in $\widehat{x}$.

Beispiel 3.2 *Es seien Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon \quad f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \qquad h(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese sind offenbar stetig differenzierbar. Es gelte $M = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | h(x_1,x_2) = \mathfrak{o}\}$. Dann ist $\widehat{x} = (0,0)$ das globale Minimum von (3.1). Zeigen Sie, dass die Forderung an den Operator $h'(\widehat{x})$, surjektiv zu sein, wesentlich für die Aussage (i) des Satzes 3.5 ist.

Die Abbildungen f und h sind Fréchet-differenzierbar mit den Fréchet-Ableitungen

$$f'(x_1,x_2) = \nabla f(x_1,x_2)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad h'(x_1,x_2) = \nabla h(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

für beliebige $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. In $\widehat{x}$ gilt offenbar

$$h'(\widehat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist $h'(\widehat{x})$ nicht surjektiv, da $h'(\widehat{x})[\mathbb{R}^2] = \operatorname{cone}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ gilt. Ferner erhält man:

$$\mathcal{L}_M(\widehat{x}) = \{d \in \mathbb{R}^2 | h'(\widehat{x})[d] = \mathfrak{o}\} = \{(d_1,d_2) \in \mathbb{R}^2 | d_2 = 0\}.$$

Mit der Wahl von $\widehat{d} = \begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}^T \in \mathcal{L}_M(\widehat{x})$ folgt jedoch beispielsweise $f'(\widehat{x})[\widehat{d}] = \nabla f(\widehat{x})^T \widehat{d} = -1$.
Da die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ überall stetig ist, muss die Surjektivität von $h'(\widehat{x})$ notwendig für die Gültigkeit der Aussage des Satzes 3.5 sein. $\square$

Im Folgenden soll eine allgemeine Optimierungsaufgabe der Form

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g(x) &\in -K \\ h(x) &= \mathfrak{o}_Z \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit dem Ziel betrachtet werden, ein notwendiges Optimalitätskriterium vom Fritz-John-Typ herzuleiten. Dabei seien grundsätzlich die folgenden Voraussetzungen **V** erfüllt:

- Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume.
- (Y, K) sei partiell geordneter Raum mit Ordnungskegel $K \subseteq Y$, K sei abgeschlossen und möge ein nichtleeres Inneres besitzen.
- Es seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon X \longrightarrow Y$ und $h\colon X \longrightarrow Z$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen.
- Der zulässige Bereich $M = \{x \in X | g(x) \in -K,\, h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$ sei nichtleer.

Zunächst wird im folgenden Lemma gezeigt, dass es in lokalen Minima der Aufgabe (3.5) keine zulässige Abstiegsrichtung geben kann.

Lemma 3.2 *(vgl. Lemma 5.2 in [3]) Es mögen die Voraussetzungen **V** erfüllt sein. Ferner sei $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.5). Ist $h'(\widehat{x})$ ein surjektiver Operator und ist die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ in $\widehat{x}$ stetig, so kann keine Richtung $d \in X$ existieren, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $f'(\widehat{x})[d] < 0$,

(ii) $g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[d] \in -\mathit{int}(K)$,

(iii) $h'(\widehat{x})[d] = \mathfrak{o}_Z$.

Beweis:
Es sei $d \in X$ so gewählt, dass die Bedingungen (ii) und (iii) erfüllt sind (existiert ein solches d nicht, so ist die Aussage des Lemmas offenbar korrekt). Dann gilt mit $S = \{x \in X | h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$ gerade $d \in \mathcal{L}_S(\widehat{x})$. Wegen Aussage (iii) von Lemma 2.10 und den getätigten Voraussetzungen gilt dann $d \in \mathcal{T}_S(\widehat{x})$. Insbesondere existieren eine (bezüglich $\|\cdot\|_X$) gegen d konvergente Folge $(d_n) \subseteq X$ und eine (bezüglich $|\cdot|$) gegen 0 konvergente Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, sodass $\widehat{x} + t_n d_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da g Fréchet-differenzierbar ist, existiert wegen (2.3) eine Funktion $o\colon \mathbb{R} \longrightarrow Y$ mit $\lim_{\alpha \searrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = \mathfrak{o}_Y$ und

$$g(\widehat{x} + t_n d_n) = g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[t_n d_n] + \|d_n\|_X \cdot o(t_n).$$

Durch Umstellen dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{g(\widehat{x}+t_n d_n)-g(\widehat{x})}{t_n} = g'(\widehat{x})[d_n] + \|d_n\|_X \cdot \frac{o(t_n)}{t_n}.$$

Insbesondere gilt damit:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(g(\widehat{x}) + \frac{g(\widehat{x}+t_n d_n)-g(\widehat{x})}{t_n}\right)\\ &\qquad = \lim_{n\to\infty}\left(g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[d_n] + \|d_n\|_X \cdot \frac{o(t_n)}{t_n}\right) = g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[d] \in -\operatorname{int}(K).\end{aligned}$$

Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ muss damit $g(\widehat{x}) + \frac{1}{t_n}(g(\widehat{x}+t_n d_n) - g(\widehat{x})) \in -K$ gelten. Da K als Ordnungskegel insbesondere ein konvexer Kegel ist, gilt damit für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$g(\widehat{x}+t_n d_n) = t_n\left(g(\widehat{x}) + \frac{g(\widehat{x}+t_n d_n)-g(\widehat{x})}{t_n}\right) + (1-t_n)g(\widehat{x}) \in -K.$$

Wegen $\widehat{x}+t_n d_n \in S$ erhält man damit für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ sogar $\widehat{x}+t_n d_n \in M$. Da f Fréchet-differenzierbar ist, folgt analog zur obigen Betrachtung bezüglich der Abbildung g:

$$f'(\widehat{x})[d] = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\widehat{x}+t_n d_n)-f(\widehat{x})}{t_n} \geqslant 0,$$

da $\widehat{x}$ ein lokales Minimum von (3.5) ist und $\widehat{x}+t_n d_n$ gegen $\widehat{x}$ strebt. Damit gilt die Aussage (i) nicht, was der Aussage des Lemmas entspricht. #

Zur Herleitung einer Verallgemeinerung des Satzes von Fritz-John soll im Folgenden der Satz 2.2 genutzt werden. Dieser Trennungssatz kann auf die Menge

$$A = \left\{\begin{pmatrix} f'(\widehat{x})[x-\widehat{x}]+\alpha \\ g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x-\widehat{x}] + y \\ h'(\widehat{x})[x-\widehat{x}]\end{pmatrix} \middle| x \in X,\, \alpha \in \mathbb{R}^+,\, y \in \operatorname{int}(K)\right\} \tag{3.6}$$

und den Punkt $\begin{pmatrix}0 & \mathfrak{o}_Y & \mathfrak{o}_Z\end{pmatrix}^T$ angewendet werden, da dieser wegen Lemma 3.2 nicht in A enthalten sein kann, sofern $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.5) ist. Die weiteren Voraussetzungen des Satzes 2.2, welche an die Menge A gestellt werden, müssen jedoch zunächst verifiziert werden.

Lemma 3.3 *(vgl. Beweis von Theorem 5.3 in [3]) Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ist $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.5), $h'(\widehat{x})$ ein surjektiver Operator und die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ in $\widehat{x}$ stetig, so ist die Menge A aus (3.6) konvex sowie offen und es gilt $\left\{\begin{pmatrix}0 & \mathfrak{o}_Y & \mathfrak{o}_Z\end{pmatrix}^T\right\} \cap A = \varnothing$.*

Beweis:
Es seien $p = \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\end{pmatrix}^T$, $q = \begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}^T \in A$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig. Dann existieren $x_1, x_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ und $y_1, y_2 \in \operatorname{int}(K)$ mit:

$$\begin{aligned} a_1 &= f'(\widehat{x})[x_1-\widehat{x}] + \alpha_1 \quad & b_1 &= g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x_1-\widehat{x}] + y_1 \quad & c_1 &= h'(\widehat{x})[x_1-\widehat{x}] \\ a_2 &= f'(\widehat{x})[x_2-\widehat{x}] + \alpha_2 \quad & b_2 &= g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x_2-\widehat{x}] + y_2 \quad & c_2 &= h'(\widehat{x})[x_2-\widehat{x}].\end{aligned}$$

Da X ein Vektorraum ist, gilt $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$. Aufgrund der Linearität der Operatoren $f'(\widehat{x})$, $g'(\widehat{x})$ und $h'(\widehat{x})$ folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 &= f'(\widehat{x})[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \widehat{x}] + \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 \\
\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 &= g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \widehat{x}] + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \\
\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 &= h'(\widehat{x})[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \widehat{x}].
\end{aligned}$$

Da offenbar $\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt und wegen der Konvexität des Kegels K auch $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \operatorname{int}(K)$ erfüllt ist, folgt $\lambda p + (1-\lambda)q \in A$. Damit ist A konvex.
Sei nun $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T \in A$. Dann existieren $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \operatorname{int}(K)$ mit

$$a = f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + \alpha \quad b = g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + y \quad c = h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}].$$

Es sei $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x - \widehat{x}$. Da $h'(\widehat{x})$ surjektiv ist, ist die Menge $V = h'(\widehat{x})[U]$ offen und enthält $h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}]$ (vgl. Theorem IV.3.3 in [6]). Damit können hinreichend kleine Störungen $\tilde{c} := h'(\widehat{x})(\tilde{x} - \widehat{x}) \in V$ von c mit $\tilde{x} - \widehat{x} \in U$ realisiert werden. Wird U nun hinreichend klein gewählt, so können wegen der Stetigkeit der Fréchet-Ableitungen $f'(\widehat{x})$ und $g'(\widehat{x})$ für alle $\tilde{c}$ gerade $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ und $\tilde{y} \in \operatorname{int} K$ so gewählt werden, dass hinreichend kleine Störungen $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{b} \in Y$ von a und b realisiert werden, für die

$$\tilde{a} = f'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] + \tilde{\alpha} \qquad \tilde{b} = g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] + \tilde{y},$$

gilt. Dies ist möglich, da die Mengen $\mathbb{R}^+$ und $\operatorname{int}(K)$ selbst offen sind. Da ersichtlich $\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix}^T \in A$ erfüllt ist, muss jedoch auch A offen sein, da jeder Punkt dieser Menge bereits innerer Punkt ist.
Angenommen, es gilt $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{o}_Y & \mathfrak{o}_Z \end{pmatrix}^T \in A$. Dann existieren $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \operatorname{int}(K)$ mit

$$0 = f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + \alpha \quad \mathfrak{o}_Y = g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + y \quad \mathfrak{o}_Z = h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}].$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] < 0 \quad g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] \in -\operatorname{int}(K) \quad h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] = \mathfrak{o}_Z.$$

Dies steht im Widerspruch zu Lemma 3.2, da mit $x - \widehat{x}$ eine zulässige Abstiegsrichtung im lokalen Minimum $\widehat{x}$ existieren würde. #

Mit den in den vorangegangenen Lemmata bereitgestellten Hilfsmitteln ist es nun möglich, ein notwendiges Optimalitätskriterium vom Fritz-John-Typ zu präsentieren.

Satz 3.6 *(vgl. Theorem 5.3 in [3]) Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Es sei $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.5), der Operator $h'(\widehat{x})$ sei surjektiv und die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ sei in $\widehat{x}$ stetig. Dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0^+$ sowie Funktionale $\lambda \in K^D$ und $\mu \in Z^*$ mit $(\lambda_0, \lambda, \mu) \neq (0, \mathfrak{o}_{Y^*}, \mathfrak{o}_{Z^*})$, sodass gilt:*

$$\forall d \in X: \quad (\lambda_0 f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}) \circ \lambda + h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d] = 0, \tag{3.7}$$

$$(g \circ \lambda)(\widehat{x}) = 0. \tag{3.8}$$

Beweis:
Wegen Lemma 3.3 ist die Menge A aus (3.6) konvex, offen und ersichtlich nichtleer. Wegen $\{\begin{pmatrix}0 & \mathtt{o}_Y & \mathtt{o}_Z\end{pmatrix}^T\} \cap A = \varnothing$ kann Satz 2.2 angewandt werden. Daraus folgt die Existenz einer Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sowie zweier Funktionale $\lambda \in Y^*$ und $\mu \in Z^*$ mit $(\lambda_0, \lambda, \mu) \neq (0, \mathtt{o}_{Y^*}, \mathtt{o}_{Z^*})$, sodass für alle $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \operatorname{int}(K)$ gilt:

$$\lambda_0(f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + \alpha) + \langle g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + y, \lambda\rangle + \langle h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}], \mu\rangle > \gamma \geqslant 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit der auftretenden Funktionale und Operatoren folgt aus $\operatorname{cl}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}_0^+$ und $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(K)) = \operatorname{cl}(K)$ für alle $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $y \in K$ die Ungleichung

$$\lambda_0(f'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + \alpha) + \langle g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] + y, \lambda\rangle + \langle h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}], \mu\rangle \geqslant 0. \quad (3.9)$$

Da $\widehat{x} \in M$ gilt, ist insbesondere $-g(\widehat{x}) \in K$ erfüllt. Damit kann in (3.9) speziell $x = \widehat{x}$, $\alpha = 1$ und $y = -g(\widehat{x})$ gewählt werden und man erhält $\lambda_0 \geqslant 0$.
Wählt man in (3.9) speziell $x = \widehat{x}$ und $\alpha = 0$, so folgt $\langle g(\widehat{x}) + y, \lambda\rangle \geqslant 0$ für alle $y \in K$. Da K ein Kegel ist, gilt insbesondere für alle $y \in K$ und alle $t \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung $\langle g(\widehat{x}) + ty, \lambda\rangle \geqslant 0$. Dies ist wegen der Linearität der dualen Paarung gleichbedeutend mit $\langle \frac{1}{t} g(\widehat{x}) + y, \lambda\rangle \geqslant 0$. Mit $t \to \infty$ erhält man daraus sofort $\langle y, \lambda\rangle \geqslant 0$ für alle $y \in K$, folglich gilt $\lambda \in K^D$.
Da $\widehat{x} \in M$ gilt, folgt $-g(\widehat{x}) \in K$. Wegen $\lambda \in K^D$ folgt daraus sofort $(g \circ \lambda)(\widehat{x}) = \langle g(\widehat{x}), \lambda\rangle = -\langle -g(\widehat{x}), \lambda\rangle \leqslant 0$. Andererseits liefert (3.9) mit $x = \widehat{x}$, $\alpha = 0$ und $y = \mathtt{o}_Y$ die Ungleichung $(g \circ \lambda)(\widehat{x}) = \langle g(\widehat{x}), \lambda\rangle \geqslant 0$. Zusammenfassend gilt also (3.8).
Setzt man in (3.9) zuletzt $\alpha = 0$ und $y = -g(\widehat{x})$, so folgt:

$$\forall x \in X: \quad (\lambda_0 f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}) \circ \lambda + h'(\widehat{x}) \circ \mu)[x - \widehat{x}] \geqslant 0.$$

Da diese Ungleichung für alle $x \in X$ gelten soll, kann sie äquivalent als

$$\forall d \in X: \quad (\lambda_0 f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}) \circ \lambda + h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d] \geqslant 0$$

geschrieben werden. Ferner muss sie für ein $\tilde{d} \neq \mathtt{o}_X$ gelten. Da X ein reeller Vektorraum ist, muss sie dann auch für $-\tilde{d}$ gelten. Aufgrund der Linearität des Operators $\lambda_0 f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}) \circ \lambda + h'(\widehat{x}) \circ \mu$ gilt folglich auch (3.7). #

In den Voraussetzungen des Satzes 3.6 kann auf die Surjektivität des Operators $h'(\widehat{x})$ auch verzichtet werden, wenn im Gegenzug garantiert wird, dass die Menge $h'(\widehat{x})[X]$ abgeschlossen ist (vgl. Theorem 5.3 in [3]). Ein Quadrupel $(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \mu) \in M \times \mathbb{R}_0^+ \times K^D \times Z^*$, welches die Aussagen von Satz 3.6 erfüllt, wird Fritz-John-Punkt von (3.5) genannt.
Wie schon in der endlichdimensionalen Optimierung, so ist es auch hier wünschenswert, dass der führende Multiplikator λ_0 aus (3.7) echt positiv ist, da andernfalls das Zielfunktional f in den Fritz-John-Bedingungen (3.7) und (3.8) keine Rolle spielen würde. Zwei dafür hinreichende Kriterien werden im Folgenden vorgestellt.

Definition 3.1 *Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ferner sei $\widehat{x} \in M$ beliebig gewählt.*

(i) In $\widehat{x}$ ist die Kurcyusz-Robinson-Zowe-Regularitätsbedingung ***KRZCQ*** *erfüllt, falls der Operator $h'(\widehat{x})$ surjektiv ist und*

$$g'(\widehat{x})[Ker(h'(\widehat{x}))] + cone(K + \{g(\widehat{x})\}) = Y$$

gilt, wobei unter $Ker(h'(\widehat{x})) = \{d \in X | h'(\widehat{x})[d] = \mathfrak{o}_Z\}$ der Nullraum von $h'(\widehat{x})$ zu verstehen ist.

(ii) In $\widehat{x}$ ist die Mangasarian-Fromowitz-Regularitätsbedingung ***MFCQ*** *erfüllt, falls der Operator $h'(\widehat{x})$ surjektiv ist und es ein Element $x \in M$ mit den Eigenschaften $g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] \in -\, int(K)$ sowie $h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] = \mathfrak{o}_Z$ gibt.*

Offenbar sind mit $S = \{x \in X | h(x) = \mathfrak{o}_Z\}$ die Mengen $\mathrm{Ker}(h'(\widehat{x}))$ und $\mathcal{L}_S(\widehat{x})$ identisch.
Zunächst wird die Beziehung der Bedingungen KRZCQ und MFCQ zueinander analysiert.

Lemma 3.4 *(vgl. Theorem 5.6 in [3]) Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ferner sei in einem Punkt $\widehat{x} \in M$ MFCQ erfüllt. Dann gilt in $\widehat{x}$ auch KRZCQ.*

Beweis:
Da $h'(\widehat{x})$ nach MFCQ surjektiv ist, muss dies nicht separat verifiziert werden. Sei $y \in Y$ beliebig gewählt. Da MFCQ gilt, existiert ein $x \in M$ mit $x - \widehat{x} \in \mathrm{Ker}(h'(\widehat{x}))$ und $g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] \in -\,\mathrm{int}(K)$. Demnach gibt es für eine hinreichend große Zahl $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ein $v \in K$ mit

$$g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] - \frac{1}{\alpha} y = -v.$$

Wegen der Linearität des Operators $g'(\widehat{x})$ gilt nach Umstellen dieser Gleichung nach y gerade

$$y = g'(\widehat{x})[\alpha(x - \widehat{x})] + \alpha(v + g(\widehat{x})).$$

Wegen $h'(\widehat{x})[\alpha(x - \widehat{x})] = \alpha h'(\widehat{x})[x - \widehat{x}] = \mathfrak{o}_Z$ gilt $\alpha(x - \widehat{x}) \in \mathrm{Ker}(h'(\widehat{x}))$, also folgt $y \in g'(\widehat{x})[\mathrm{Ker}(h'(\widehat{x}))] + \mathrm{cone}(K + \{g(\widehat{x})\})$. Da jedes $y \in Y$ derart darstellbar ist, muss in $\widehat{x}$ KRZCQ erfüllt sein. #

Wegen Lemma (3.4) ist es nun ausreichend zu zeigen, dass es sich bei KRZCQ um eine Regularitätsbedingung im gewohnten Sinne handelt.

Satz 3.7 *(vgl. Theorem 5.3 in [3]) Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ferner sei $\widehat{x} \in M$ ein lokales Minimum von (3.5), die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ sei in $\widehat{x}$ stetig und dort gelte KRZCQ. Dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ sowie Funktionale $\lambda \in K^D$ und $\mu \in Z^*$, sodass (3.7) und (3.8) erfüllt sind.*

Beweis:
Da der Operator $h'(\widehat{x})$ wegen der Gültigkeit von KRZCQ surjektiv ist, genügt es wegen Satz 3.6 zu zeigen, dass $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ gilt. Sei $(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \mu)$ ein zu $\widehat{x}$ gehörender Fritz-John-Punkt. Angenommen, es gilt $\lambda_0 = 0$. Dann gilt für alle $d \in X$ wegen (3.7) die Gleichung

$$(g'(\widehat{x}) \circ \lambda)[d] = -(h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d]. \tag{3.10}$$

Es sei $y \in Y$ beliebig gewählt. Dann existieren $d \in \operatorname{Ker}(h'(\widehat{x}))$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $v \in K$ mit $y = g'(\widehat{x})[d] + \alpha(v + g(\widehat{x}))$. Wendet man nun $\lambda \in K^D$ auf y an, so folgt wegen (3.8) und (3.10):

$$\begin{aligned}\langle y, \lambda \rangle &= \langle g'(\widehat{x})[d] + \alpha(v + g(\widehat{x})), \lambda \rangle = \langle g'(\widehat{x})[d], \lambda \rangle + \alpha \langle v, \lambda \rangle + \alpha \langle g(\widehat{x}), \lambda \rangle \\ &= (g'(\widehat{x}) \circ \lambda)[d] + \alpha \langle v, \lambda \rangle + \alpha (g \circ \lambda)(\widehat{x}) = -(h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d] + \alpha \langle v, \lambda \rangle.\end{aligned}$$

Da ferner $-(h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d] = -\mu(h'(\widehat{x})[d]) = 0$ erfüllt ist, weil $d \in \operatorname{Ker}(h'(\widehat{x}))$ gewählt wurde, gilt

$$\langle y, \lambda \rangle = \alpha \langle v, \lambda \rangle.$$

Zieht man in Betracht, dass $\lambda \in K^D$ gilt und $v \in K$ gewählt wurde, muss für alle $y \in Y$ die Ungleichung $\langle y, \lambda \rangle \geqslant 0$ nach Definition des Dualkegels gelten. Dies kann jedoch nur dann der Fall sein, wenn $\lambda = \mathfrak{o}_{Y^*}$ gilt, da die duale Paarung linear ist und Y als Vektorraum für jedes $y \in Y$ natürlich auch $-y$ enthält.
Wiederum wegen (3.7) muss nun also $0 = (h'(\widehat{x}) \circ \mu)[d] = \mu(h'(\widehat{x})[d])$ für alle $d \in X$ gelten. Da jedoch $h'(\widehat{x})$ wegen KRZCQ surjektiv sein muss, ist dies gleichbedeutend mit $\mu(Z) = \{0\}$, also $\mu = \mathfrak{o}_{Z^*}$. Zusammenfassend gilt also $(\lambda_0, \lambda, \mu) = (0, \mathfrak{o}_{Y^*}, \mathfrak{o}_{Z^*})$. Dies steht im Widerspruch zur Aussage des Satzes 3.6, also muss die Annahme $\lambda_0 = 0$ falsch gewesen sein. #

Ist $(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \mu)$ ein Fritz-John-Punkt von (3.5) und gilt $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, so ist wegen der Linearität aller Funktionale und Operatoren in (3.7) und (3.8) auch $(\widehat{x}, 1, \widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$ mit $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\lambda$ und $\widehat{\mu} = \frac{1}{\lambda_0}\mu$ ein Fritz-John-Punkt von (3.5). Damit spielt der Multiplikator λ_0 in (3.7) keine Rolle mehr. Man charakterisiert deshalb einen Fritz-John-Punkt im Falle der Gültigkeit einer Regularitätsbedingung lediglich durch ein Tripel $(\widehat{x}, \widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$ und nennt dieses Karush-Kuhn-Tucker-Punkt, oder kurz: KKT-Punkt.
Im Folgenden sollen die obigen Resultate anhand der speziellen endlichdimensionalen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g_i(x) &\leqslant 0 \qquad ; i = 1, \ldots, m \\ h_j(x) &= 0 \qquad ; j = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{3.11}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ verdeutlicht werden. Auch hier bezeichne M den zulässigen Bereich dieser Aufgabe. Im Hinblick auf die Voraussetzungen **V** seien $g \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $h \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ die gemäß $g = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_m \end{pmatrix}^T$ und $h = \begin{pmatrix} h_1 & \ldots, & h_p \end{pmatrix}^T$ definierten Vektorfunktionen; ferner gelte $K = \mathbb{R}_0^{m+}$ und $M \neq \varnothing$. Wegen $(\mathbb{R}^k)^* = \mathbb{R}^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}^+$ entspricht die Aussage des Satzes 3.6 bezüglich eines lokalen Minimums $\widehat{x} \in M$ der Aufgabe (3.11) genau jener des Satzes von Fritz John, mit der Ausnahme, dass im endlichdimensionalen Fall auf die Forderungen nach der Surjektivität $h'(\widehat{x})$ und der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto h'(x)$ in $\widehat{x}$ verzichtet werden kann. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Jacobimatrix $\nabla h(x)$ überall stetig und die Menge $\nabla h(x)[\mathbb{R}^n]$ stets abgeschlossen ist. Um zu garantieren, dass es einen KKT-Punkt $(\widehat{x}, \lambda, \mu)$ gibt, muss ebenfalls eine Regularitätsbedingung erfüllt sein. Insbesondere gilt die vorgestellte Bedingung MFCQ in $\widehat{x}$, falls eine Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\widehat{x})^T d &< 0 \qquad ; i \in I_0(\widehat{x}) \\ \nabla h_j(\widehat{x})^T d &= 0 \qquad ; j = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{3.12}$$

existiert und die Menge $\{\nabla h_1(\widehat{x}), \ldots, \nabla h_p(\widehat{x})\}$ linear unabhängig ist. Dabei bezeichnet $I_0(\widehat{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} | g_i(\widehat{x}) = 0\}$ die Menge aller in $\widehat{x}$ aktiven Indizes. Wegen Lemma 3.4 folgt aus der Gültigkeit von MFCQ in $\widehat{x}$ auch die Gültigkeit von KRZCQ in $\widehat{x}$. Es gilt jedoch auch die Umkehrung. Sollte in $\widehat{x}$ nämlich KRZCQ erfüllt sein, so besitzt die Jacobimatrix $\nabla h(\widehat{x})$ vollen Rang und ist, als lineare Abbildung betrachtet, surjektiv; offensichtlich sind damit auch die Gradienten $\nabla h_1(\widehat{x}), \ldots, \nabla h_p(\widehat{x})$ linear unabhängig. Ferner folgt die Existenz einer Richtung $d \in \mathrm{Ker}(\nabla h(\widehat{x}))$, eines Vektors $v \in \mathbb{R}_0^{m+}$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\nabla g(\widehat{x})[d] + \alpha(v + g(\widehat{x})) \in -\operatorname{int}(\mathbb{R}_0^{m+}),$$

da wegen KRZCQ gerade

$$\mathbb{R}^m = \nabla g(\widehat{x})[\mathrm{Ker}(\nabla h(\widehat{x}))] + \mathrm{cone}(\mathbb{R}_0^{m+} + \{g(\widehat{x})\})$$

gilt. Sei $i \in I_0(\widehat{x})$ fixiert. Dann gilt aufgrund der Wahl von d und $\alpha, v_i \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\nabla g_i(\widehat{x})^T d \leqslant \nabla g_i(\widehat{x})^T d + \alpha v_i = \nabla g_i(\widehat{x})^T d + \alpha(v_i + g_i(\widehat{x})) < 0.$$

Folglich löst d das System (3.12), da wegen $d \in \mathrm{Ker}(\nabla h(\widehat{x}))$ auch $\nabla h(\widehat{x}) d = \mathfrak{o}$ gilt. Insgesamt ist in $\widehat{x}$ damit MFCQ erfüllt.
Abschließend sollen hier noch die Besonderheiten konvexer Optimierungsaufgaben hervorgehoben werden. Dafür wird noch eine weitere bekannte Regularitätsbedingung, die Slater-Bedingung, vorgestellt.

Definition 3.2 *Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ferner sei f $\mathbb{R}_0^+$-konvex, g K-konvex und h linear. Dann erfüllt die Aufgabe (3.5) die Slater-Bedingung* ***SCQ****, falls ein $\tilde{x} \in X$ mit $g(\tilde{x}) \in -\,int(K)$ und $h(\tilde{x}) = \mathfrak{o}_Z$ existiert und der Operator h surjektiv ist.*

Es ist hervorhebenswert, dass SCQ auch im nicht notwendiger Weise endlichdimensionalen Fall eine globale Regularitätsbedingung ist, das heißt, sie gilt nicht nur in einem zulässigen Punkt der Aufgabe (3.5), sondern in allen derartigen Punkten. Die Voraussetzung an h, surjektiv zu sein, ist wesentlich. Im endlichdimensionalen Fall ist dies damit zu begründen, dass keine linear abhängigen, also insbesondere redundanten, Gleichungsnebenbedingungen in (3.11) enthalten sind: Sei $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ eine Matrix mit linear abhängigen Zeilen und $Bx = \mathfrak{o}$ die Menge aller Gleichungsnebenbedingungen der Optimierungsaufgabe (3.11). Dann existiert ein $\mu \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathfrak{o}\}$ mit $B^T\mu = \mathfrak{o}$. Somit wäre unabhängig von der Wahl eines zulässigen Punktes $\widehat{x} \in M$ stets $(\widehat{x}, 0, \mathfrak{o}, \mu)$ ein Fritz-John-Punkt; insbesondere dann, wenn $\widehat{x}$ die optimale Lösung von

(3.11) ist. Damit ist die alleinige Forderung nach der Existenz eines bezüglich der Ungleichungsnebenbedingungen inneren Punktes $\tilde{x}$, für den $B\tilde{x} = \mathfrak{o}$ gilt, keine Regularitätsbedingung.
Sei nun wieder die allgemeine Aufgabe (3.5) betrachtet. Unter SCQ sind die KKT-Bedingungen notwendig und hinreichend für Optimalität, falls f $\mathbb{R}_0^+$-konvex, g K-konvex und h linear ist.

Satz 3.8 *Es mögen die Voraussetzungen* ***V*** *erfüllt sein. Ferner sei f $\mathbb{R}_0^+$-konvex, g K-konvex und h linear. Außerdem gelte SCQ. Dann ist $\widehat{x} \in M$ genau dann ein globales Minimum der Aufgabe (3.5), falls Funktionale $\lambda \in K^D$ und $\mu \in Z^*$ existieren, sodass (3.7) mit $\lambda_0 = 1$ und (3.8) gelten.*

Beweis:
[$\Longrightarrow$] Es sei $\widehat{x}$ ein globales Minimum von (3.5). Da h ein linearer und Fréchet-differenzierbarer Operator ist, gilt $h'(\widehat{x})[d] = h(d)$ für alle $d \in X$. Folglich ist der Operator $h'(\widehat{x})$ surjektiv, da wegen SCQ h surjektiv ist. Außerdem ist die Abbildung $x \mapsto h'(x)$ überall stetig, da sie konstant ist. Wegen Satz 3.6 existieren also eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0^+$ sowie Funktionale $\lambda \in K^D$ und $\mu \in Z^*$, sodass $(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \mu)$ ein Fritz-John-Punkt von (3.5) ist. Man betrachte nun speziell die Richtung $d = \tilde{x} - \widehat{x}$, wobei $\tilde{x}$ der in der Definition von SCQ erwähnte Punkt sein möge. Dann gilt wegen der Linearität von h gerade $h'(\widehat{x})[d] = h'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] = h(\tilde{x} - \widehat{x}) = h(\tilde{x}) - h(\widehat{x}) = \mathfrak{o}_Z$. Außerdem erhält man wegen Lemma 2.7 aufgrund der K-Konvexität von g zunächst $g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] - g(\tilde{x}) \in -K$. Zusammen mit $g(\tilde{x}) \in -\operatorname{int}(K)$ und der Konvexität des Kegels K folgt nun

$$g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] = 2\left(\frac{1}{2}\left(g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\tilde{x} - \widehat{x}] - g(\tilde{x})\right) + \frac{1}{2}g(\tilde{x})\right) \in -\operatorname{int}(K).$$

Damit ist gezeigt, dass in $\widehat{x}$ die Bedingung MFCQ gilt. Insbesondere gilt dann wegen Lemma 3.4 in $\widehat{x}$ auch KRZCQ. Wegen Satz 3.7 kann folglich o.B.d.A. $\lambda_0 = 1$ angenommen werden.
[$\Longleftarrow$] In $\widehat{x} \in M$ mögen (3.7) und (3.8) mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt sein. Angenommen, $\widehat{x}$ ist kein globales Minimum von (3.5). Dann existiert ein $\bar{x} \in M$ mit $f(\bar{x}) < f(\widehat{x})$. Folglich gilt mit (3.7) und (3.8) unter Ausnutzung von $\lambda \in K^D$, der Linearität von h und Lemma 2.7 die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
0 &= (f'(\widehat{x}) + g'(\widehat{x}) \circ \lambda + h'(\widehat{x}) \circ \mu)[\bar{x} - \widehat{x}] \\
&= f'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] + \langle g'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}], \lambda\rangle + \langle h'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}], \mu\rangle \\
&\leqslant f'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] + \langle g(\widehat{x}), \lambda\rangle + \langle g'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}], \lambda\rangle + \langle -g(\bar{x}), \lambda\rangle + \langle h(\bar{x} - \widehat{x}), \mu\rangle \\
&= f'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] + \langle g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] - g(\bar{x}), \lambda\rangle + \langle h(\bar{x}) - h(\widehat{x}), \mu\rangle \\
&= f'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] - \langle \underbrace{-(g(\widehat{x}) + g'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] - g(\bar{x}))}_{\in K}, \lambda\rangle + \langle \mathfrak{o}_Z, \mu\rangle \\
&\leqslant f'(\widehat{x})[\bar{x} - \widehat{x}] \leqslant f(\bar{x}) - f(\widehat{x}) < 0.
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, also muss die Annahme, bei $\widehat{x}$ würde es sich nicht um ein globales Minimum von (3.5) handeln, falsch sein. #

Im Beweis von Satz 3.8 wird deutlich, dass die KKT-Bedingungen im Fall der $\mathbb{R}_0^+$-Konvexität von f, der K-Konvexität von g und der Linearität von h stets ein hinreichendes Optimalitätskriterium darstellen, unabhängig von der Erfülltheit von SCQ. Das folgende Beispiel soll die Resultate dieses Abschnitts abschließend illustrieren.

Beispiel 3.3 *Gegeben seien drei Funktionale* $f, g, h \colon C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *durch*

$$f(x) = \int_0^1 [x(t)-1]^2 dt \quad g(x) = \int_0^1 [x(t)+1]^2 dt - 1 \quad h(x) = \int_0^1 t \cdot x(t) dt$$

für beliebige $x \in C([0,1])$*. Ferner gelte* $K = \mathbb{R}_0^+$*. Man verifiziere, dass Satz 3.8 anwendbar ist, und zeige damit, dass* $\widehat{x} \equiv 0$ *ein globales Minimum der Aufgabe (3.5) ist.*

Zunächst sind die Funktionale f und g $\mathbb{R}_0^+$-konvex, da die Funktionen $t \mapsto (t-1)^2$ und $t \mapsto (t+1)^2$ im gewohnten Sinne konvex sind. Der Operator h ist offensichtlich linear. Außerdem ist das Innere von $\mathbb{R}_0^+$ nichtleer. Weiterhin sind die Funktionale f, g und h Fréchet-differenzierbar und mit Beispiel 2.3 bzw. der Linearität von h erhält man für beliebige $x \in C([0,1])$ und $d \in C([0,1])$ die Fréchet-Ableitungen

$$f'(x)[d] = 2 \int_0^1 [x(t)-1] d(t) dt$$
$$g'(x)[d] = 2 \int_0^1 [x(t)+1] d(t) dt$$
$$h'(x)[d] = \int_0^1 t \cdot d(t) dt.$$

Insbesondere in $\widehat{x} \equiv 0$ gilt dann:

$$f'(\widehat{x})[d] = -2 \int_0^1 d(t) dt \quad g'(\widehat{x})[d] = 2 \int_0^1 d(t) dt \quad h'(\widehat{x})[d] = \int_0^1 t \cdot d(t) dt.$$

Der Operator h ist surjektiv, da für beliebige Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ die stetige Funktion $t \mapsto 3\alpha t$ ein Urbild von α bezüglich h ist. Ferner gilt für die Funktion $\tilde{x} \in C([0,1])$, welche durch $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}$ für alle $t \in [0,1]$ definiert ist, gerade:

$$h(\tilde{x}) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t\right] dt = 0$$
$$g(\tilde{x}) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}t + \frac{2}{3}\right]^2 dt - 1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{4}{9}\right] dt - 1 = \frac{31}{36} - 1 = -\frac{5}{36} < 0.$$

Damit gilt SCQ für die betrachtete Aufgabe. Wegen Satz 3.8 stellen die KKT-Bedingungen also ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium dar. Es

bleibt demnach zu zeigen, dass die KKT-Bedingungen in $\widehat{x}$ erfüllt sind.
Zunächst müssen Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ und $\mu \in \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle $d \in C([0,1])$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= f'(\widehat{x})[d] + \langle g'(\widehat{x})[d], \lambda \rangle + \langle h'(\widehat{x})[d], \mu \rangle \\ &= -2 \int_0^1 d(t)dt + 2\lambda \int_0^1 d(t)dt + \mu \int_0^1 t \cdot d(t)dt = \int_0^1 (-2 + 2\lambda + \mu t)d(t)dt \end{aligned}$$

gilt. Man wähle dafür $\lambda = 1$ und $\mu = 0$. Wegen $g(\widehat{x}) = 0$ gilt insbesondere $(g \circ \lambda)(\widehat{x}) = \langle g(\widehat{x}), \lambda \rangle = \langle 0, \lambda \rangle = 0$. Folglich gelten die Gleichungen (3.7) und (3.8) mit $\lambda_0 = 1$, also sind in $\widehat{x}$ die KKT-Bedingungen erfüllt. Damit muss $\widehat{x}$ ein globales Minimum von (3.5) sein. $\square$

Anhang A: Übersicht normierter Räume

Die folgenden Tabellen stellen wesentliche Informationen über gebräuchliche Banachäume sowie ihre Dualräume und die zugehörigen dualen Paarungen bereit (vgl. II in [2] sowie I und II.2 in [6]).
Seien hierzu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und kompakte Menge, $\mathcal{X} = \mathcal{B}(X)$ die von X erzeugte borelsche σ-Algebra, $\mathfrak{Z}(X)$ die Menge aller Zerlegungen von X sowie $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichteere Menge.

Raum	Beschreibung	Norm	reflexiv
c_0	reelle Nullfolgen	$\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$	nein
c	konvergente Folgen	$\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$	nein
l_1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$	$\|(x_n)\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$	nein
l_p	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, $1 < p < \infty$	$\|(x_n)\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$	ja
l_∞	beschränkte Folgen	$\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$	nein
$C(X)$	stetige Funktionen auf X	$\|f\| = \max\limits_{x\in X} \|f(x)\|$	nein
$C^k(X)$	k-mal stetig differenzierbare Funktionen auf X	$\|f\| = \sum\limits_{n=0}^{k} \max\limits_{x\in X} \|f^{(k)}(x)\|$	nein
$L_1(Y)$	$\int_Y \|f(x)\|dx < \infty$	$\|f\| = \int_Y \|f(x)\|dx$	nein
$L_p(Y)$	$\int_Y \|f(x)\|^p dx < \infty$, $1 < p < \infty$	$\|f\| = \left(\int_Y \|f(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$	ja
$L_\infty(Y)$	auf Y essentiell beschränkte Funktionen	$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in Y} \|f(x)\|$	nein
$M(X, \mathcal{X})$	signierte Maße über $\mathcal{X}$	$\|\mu\| = \sup\limits_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}(X)} \sum\limits_{Z\in\mathcal{Z}} \|\mu(Z)\|$	nein

Raum	Dualraum	duale Paarung
c_0	l_1	$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$
c	l_1	$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_{n+1} + y_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
l_1	l_∞	$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$
l_p, $1 < p < \infty$	l_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$
$C(X)$	$M(X, \mathcal{X})$	$\langle f, \mu \rangle = \int_X f d\mu$
$L_1(Y)$	$L_\infty(Y)$	$\langle f, g \rangle = \int_Y f(x)g(x)dx$
$L_p(Y)$, $1 < p < \infty$	$L_q(Y)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	$\langle f, g \rangle = \int_Y f(x)g(x)dx$

Es ist zu beachten, dass der Dualraum von l_∞ eine echte Obermenge von l_1 ist. Ebenso ist $L_1(Y)$ eine echte Teilmenge des Dualraumes von $L_\infty(Y)$.

Anhang B: Beschränktheitsbeweis des Operators T

Es sei $T\colon L_2^k([t_0,t_1]) \longrightarrow L_2^n([t_0,t_1])$ *der gemäß*

$$\forall u \in L_2^k([t_0,t_1])\colon \quad T(u)[t] = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau$$

definierte Operator. Dann ist T *beschränkt.*

Beweis:
Es sei $u \in L_2^k([t_0,t_1])$ eine beliebige Funktion mit den Komponentenfunktionen $u_1,\dots,u_k \in L_2([t_0,t_1])$. Mit $\|\cdot\|$ wird hier die Norm des Raumes $L_2([t_0,t_1])$ bezeichnet. Des Weiteren sind alle genutzten Beträge, Integrale und Relationszeichen komponentenweise zu verstehen.
Aufgrund der Definition der Norm in $L_2^k([t_0,t_1])$ genügt es, die Existenz einer Konstante $K > 0$ mit

$$\|T(u)\|_{L_2^n([t_0,t_1])} \leqslant K \cdot \|u\|_{L_2^k([t_0,t_1])} = K \cdot \max_{j=1,\dots,k} \|u_j\|$$

zu verifizieren.
Wegen $t \geqslant t_0$ und der Definition der Matrixexponentialfunktion gilt zunächst die Abschätzung

$$T(u)[t] \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-t_0)|A|}|B||u(\tau)|d\tau = e^{(t-t_0)|A|}|B| \left(\int\limits_{t_0}^{t} |u(\tau)|d\tau \right) =: \widehat{T}(u)[t].$$

Für $i = 1,\dots,n$ bezeichne $v_i \in L_2([t_0,t_1])$ die i-te Komponente von $\widehat{T}(u)[t]$. Dann gilt wegen $t \leqslant t_1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|v_i\|^2 &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\mathfrak{e}_i^T \widehat{T}(u)[t] \right)^2 dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\mathfrak{e}_i^T e^{(t-t_0)|A|}|B| \left(\int\limits_{t_0}^{t} |u(\tau)|d\tau \right) \right]^2 dt \\
&\leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{t_1-t_0} \cdot \mathfrak{e}_i^T e^{(t_1-t_0)|A|}|B| \begin{pmatrix} \|u_1\| \\ \vdots \\ \|u_k\| \end{pmatrix} \right]^2 dt \\
&= (t_1-t_0)^2 \cdot \left[\mathfrak{e}_i^T e^{(t_1-t_0)|A|}|B| \begin{pmatrix} \|u_1\| \\ \vdots \\ \|u_k\| \end{pmatrix} \right]^2,
\end{aligned}$$

da mittels der Hölderungleichung für alle $j = 1,\dots,k$ stets gilt:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} |u_j(\tau)|d\tau \leqslant \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} |u_j(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_j\| \cdot \sqrt{t_1-t_0}.$$

Es sei $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die gemäß $C = e^{(t_1-t_0)|A|}|B|$ definierte Matrix mit allgemeinem Eintrag c_{ij} und c_{max} sei ihr maximaler Eintrag. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{L_2^n([t_0,t_1])} &= \max_{i=1,\dots,n} \|\mathfrak{e}_i^T T(u)\| \leqslant \max_{i=1,\dots,n} \|\mathfrak{e}_i^T \widehat{T}(u)\| \\
&= \max_{i=1,\dots,n} \|v_i\| \leqslant \max_{i=1,\dots,n} \left\{ (t_1 - t_0) \cdot \mathfrak{e}_i^T C \begin{pmatrix} \|u_1\| \\ \vdots \\ \|u_k\| \end{pmatrix} \right\} \\
&= (t_1 - t_0) \cdot \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \|u_j\| \right\} \leqslant (t_1 - t_0) \cdot \max_{i=1,\dots,n} \left\{ c_{max} \cdot \sum_{j=1}^{k} \|u_j\| \right\} \\
&= (t_1 - t_0) \cdot c_{max} \cdot \sum_{j=1}^{k} \|u_j\| \leqslant (t_1 - t_0) \cdot c_{max} \cdot k \cdot \max_{j=1,\dots,k} \|u_j\| \\
&= (t_1 - t_0) \cdot c_{max} \cdot k \cdot \|u\|_{L_2^k([t_0,t_1])}.
\end{aligned}$$

Mit der von u unabhängigen Konstante $K = (t_1 - t_0) \cdot c_{max} \cdot k$ folgt

$$\|T(u)\|_{L_2^n([t_0,t_1])} \leqslant K \cdot \|u\|_{L_2^k([t_0,t_1])},$$

also ist T tatsächlich ein beschränkter Operator. #

Formelverzeichnis

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen (mit 0)
$\mathbb{N}^+$	positive natürliche Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler Raum der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge aller positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^{m+}$	Menge $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall i = 1, \dots, m \colon x_i \geqslant 0\}$
i_X	identische Relation $\{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ eines Raumes X
$\mathbb{I}_A$	Indikatorfunktion einer Menge A
$(X, \\|\cdot\\|_X)$	normierter Raum: $X \neq \varnothing$, versehen mit einer Norm $\\|\cdot\\|$
$(X^*, \\|\cdot\\|_X^*)$	Dualraum eines normierten Raumes $(X, \\|\cdot\\|_X)$
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	duale Paarung zwischen einem Raum X und seinem Dualaum X^*
B_X	Einheitskugel $\{x \in X \colon \\|x\\|_X \leqslant 1\}$ von $(X, \\|\cdot\\|_X)$
S_X	Einheitssphäre $\{x \in X \colon \\|x\\|_X = 1\}$ von $(X, \\|\cdot\\|_X)$
K^D	Dualkegel einer Menge K
$\mathfrak{o}_X$	Nullvektor des Raumes X
$\mathfrak{o}$	Nullvektor des Raumes $\mathbb{R}^n$
$\mathfrak{e}_i$	dimensionsverträglicher Einheitsvektor mit 1 an i-ter Stelle
$\lvert\cdot\rvert$	Betrag einer reellen Zahl
$\operatorname{cone}(A)$	Kegelhülle einer Menge A
$\operatorname{conv}(A)$	konvexe Hülle einer Menge A
$\operatorname{int}(A)$	Inneres einer Menge A
$\operatorname{cl}(A)$	Abschließung einer Menge A
$\varnothing$	leere Menge
$\mathcal{T}_A(\widehat{x})$	Tangentenkegel an eine Menge A im Punkt $\widehat{x}$
$\mathcal{L}_A(\widehat{x})$	linearisierter Tangentenkegel an eine Menge A im Punkt $\widehat{x}$
$\operatorname{Ker} f$	Nullraum einer linearen Abbildung f
$f'(\widehat{x})$	Fréchet-Ableitung einer Abbildung f in $\widehat{x}$
$\nabla f(\widehat{x})$	Gradient einer differenzierbaren Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\widehat{x}$
$\nabla g(\widehat{x})$	Jacobimatrix einer differenzierbaren Funktion $g \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in $\widehat{x}$
e^{tA}	Matrixexponentialfunktion einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Literatur

[1] S. Barnett, R.G. Cameron (1990) *Introduction to Mathematical Control Theory* Oxford University Press Oxford, New York, Toronto

[2] H. Heuser (1992) *Funktionalanalysis* Teubner Verlag Stuttgart

[3] J. Jahn (1996) *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York

[4] J. Zowe, S. Kurcyusz (1979) *Regularity and Stability for the Mathematical Programming Problem in Banach Spaces* Applied Mathematics in Optimization Ausgabe 15, 49-62

[5] F. Tröltzsch (2009) *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen* Vieweg+Teubner Wiesbaden

[6] D. Werner (1995) *Funktionalanalysis* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York