

Zur Ermittlung von Parametern der Bodenbewegungsvorausberechnung über Kavernenfeldern

Marcel Sodmann ⁽¹⁾, Jörg Benndorf ⁽²⁾

⁽¹⁾ STORAG ETZEL GmbH, ⁽²⁾ TU Bergakademie Freiberg

ZUSAMMENFASSUNG:

Im Beitrag werden zwei alternative Methoden zur inversen Schätzung der Parameter für Bodenbewegungsvorausberechnungsmodelle aus Messdaten zu Höhenänderungen an Höhenfestpunkten gegenübergestellt, ein Ansatz unter Nutzung der Ausgleichsrechnung sowie ein Bayes'scher Ansatz unter Nutzung der Monte-Carlo-Simulation. Der Vergleich erfolgt im Kontext eines Kavernenfeldes. Es wird gezeigt, dass durch beide Verfahren aus Höhenbeobachtungen an der Tagesoberfläche die Parameter Hohlraumkonvergenz und Einwirkungswinkel signifikant präzisiert werden können, was zu verbesserten Vorhersagen führt. Im Ergebnis der Studie lassen sich Möglichkeiten ableiten, das Messnetz zu optimieren.

ABSTRACT:

The paper compares two alternative methods for inverse estimation of the parameters for ground movement prediction models from elevation change measurements at fixed levelling points, an approach using the geodetic adjustment theory and a Bayesian approach using Monte-Carlo simulation. The comparison is performed in the setting of a cavern field. It is shown that both methods allow utilizing elevation-change observations on the surface to significantly improve the prediction of the parameters convergence and angle of influence. Such an approach will lead to improved predictions. As a result of the study, opportunities for optimizing the elevation measurement network can be lifted.

1 Einführung

Bei der Parameterschätzung zur Voraussage von Bodenbewegungen über Kavernenfeldern gilt es, folgende Aufgabenstellung zu lösen (Abbildung 1). An Höhenfestpunkten im Revier werden Höhenunterschiede zwischen zwei Messepochen $s(r,t)$ ermittelt. Daraus sind Parameter eines Modells zur Vorausberechnung von Bodenbewegungen zu schätzen.

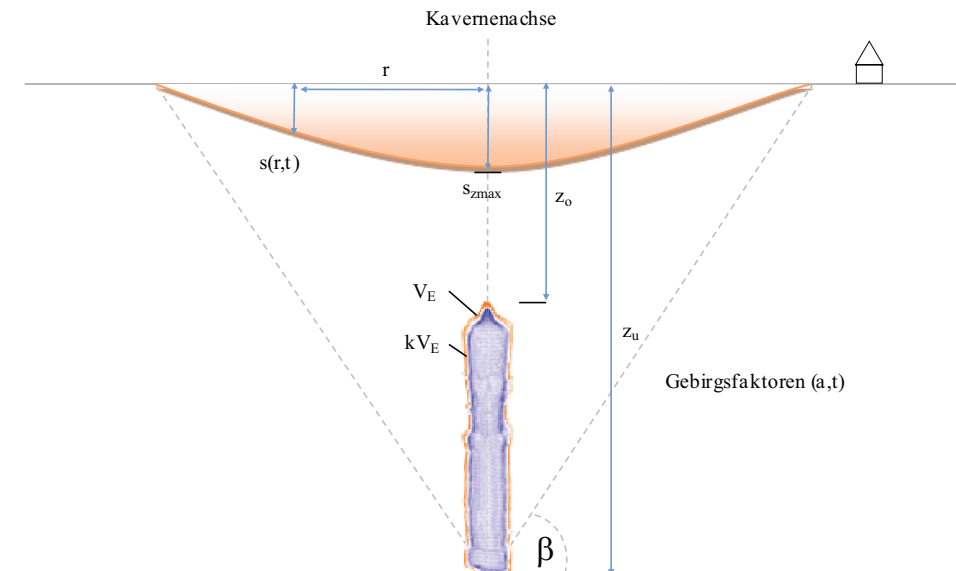


Abbildung 1: Schema zur Vorausberechnung von Bodenbewegungen

Im Allgemeinen wird das Modell zur Bodenbewegungsvorausberechnung durch verschiedene Parameter beschrieben. Das können Konvergenz, Grenzwinkel, Zeitfaktor, etc. sein. Diese sind aus in-situ Beobachtungen $s(r,t)$, in der Regel durch ein Nivellement, des zeitlichen Senkungsverlaufes zu bestimmen. Damit liegt ein inverses Problem vor (Abbildung 2).

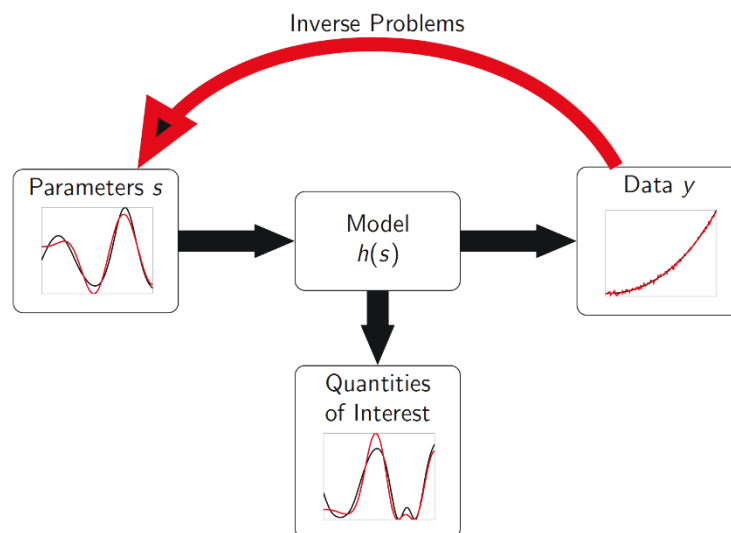


Abbildung 2: Inverses Problem

Das Problem der Inversen Modellierung ist generell durch folgende Komponenten charakterisiert:

10. Das System oder ein Prozess wird durch ein Modell approximiert. Dieses Modell ist durch Parameter charakterisiert.
11. Es existieren Gesetzmäßigkeiten (z.B. physikalische oder geometrische Beziehungen), die es erlauben, Vorhersagen für eine messbare Größe abzuleiten (Vorwärtsmodell).
12. Inverse Modellierung (Parameterschätzung): Nutzung tatsächlicher Beobachtungen, um Parameter des Vorwärtsmodells zu schätzen.

Der Beitrag stellt die Anwendung zwei alternativer Ansätze zur Parameterschätzung gegenüber. Zum einen wird das in der Ausgleichsrechnung genutzte Gauß-Markov Modell angewandt. Als zweites Verfahren wird ein Bayes'scher Ansatz unter Nutzung der Monte-Carlo Simulation vorgestellt. Anhand einer synthetischen Fallstudie wird die Güte beide Verfahren abgeschätzt und Ergebnisse gegenübergestellt.

2 Parameterschätzung durch Ausgleichsrechnung

Als erste Möglichkeit soll die Anwendung der Ausgleichsrechnung an einem Kavernenfeldmodell zur Bestimmung der o.a. Parameter aufgezeigt werden. Die Größe der Konvergenz und der Einwirkungswinkel β sollen bestimmt werden, weil Sie nur durch Näherung oder durch messtechnische begründete Ungenauigkeit bekannt sind.

Kavernen auf Kavernenfeldern sind typischerweise hexagonal (trigonal), meist in gleichen horizontalen Abständen zueinander angeordnet. Es wird ein Kavernenfeld mit 3 Kavernen angenommen. Diese sollen einen Achsabstand von 300 m zueinander haben.

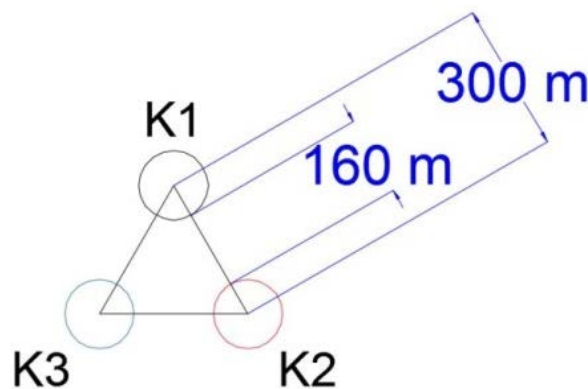


Abbildung 3: angenommenes Kavernenfeld

Der Durchmesser soll maximal 70 m betragen. Das Kavernentiefste beginnt bei allen Kavernen bei 850 m Teufe. Sie sollen eine Höhe von 400 m haben.

Tabelle 1: Geometrische Parameter der Kavernen und Einwirkungswinkel

Kavernen K1-K3		
Kavernenhöchstes	zo [m]	850
Kavernentiefstes	zu [m]	1250
Vollflächenradius	R [m]	1715,50
Einwirkungswinkel β	Grad	31

Neben den geometrischen Parametern, ist für die Größenordnung der Auswirkungen auf die Tagesoberfläche das gespeicherte Medium in der Kaverne maßgebend. Ölspeicherkavernen z.B. sind eher als langfristige Speicherkavernen, ohne dynamischen Mediumwechsel anzusehen. Daher haben diese Kavernen eine geringere Konvergenz, als z.B. Erdgaskavernen. Erdgaskavernen werden meist saisonal betrieben. Das Erdgas wird zum Herbst eingespeichert und bei zunehmenden niedrigen Witterungen – hier steigt der Erdgasbedarf – bis in das Frühjahr ausgespeichert. Die sogenannte Fahrweise der Kavernen bestimmt direkt durch Ein- und Auslagerung des Erdgases den Innendruck und damit direkt die Konvergenz. Folgende Annahmen wurden für die 3 Kavernen getroffen:

Tabelle 2: Eigenschaften der Kavernen

	angenommenes Medium	Ausgangsvolumen [m ³]	Konvergenz % pro Jahr
K1	Gas	300.000	2
K2	Gas	300.000	1
K3	Gas	650.000	2

Es wird angenommen, dass nach einem längeren Zeitpunkt T folgende wahre Konvergenzvolumina der Kavernen bekannt sind.

Tabelle 3: Konvergenzvolumina und vorausberechnete maximale Senkung über der Kavernenachse

	Konvergenzvolumen [m ³]	s _{max} [cm]
K1	160.185	-5,44
K2	95.415	-3,24
K3	347.068	-11,78

Messtechnisch können durch echometrische Hohlraumvermessungen die Kavernenkonvergenzen durch den direkten Epochenvergleich der Hohlraumvolumina annähernd bestimmt werden. Aufgrund der Messaufstellung von z.B. Sonarmessungen ist diese Ermittlung der Konvergenzen allerdings unpräzise. Die Genauigkeit der Volumenbestimmung variiert je nach unterschiedlichen physikalischen Rahmenbedingungen zwischen 1 bis ca. 2,5%. Durch die angenäherten Konvergenzvolumina und Kavernengeometrien ist es möglich, über Formeln die Senkungsvorausberechnungen

unter Annahme der Superposition aller 3 Kavernen durchzuführen. Die Abbildung 4 zeigt den Gesamtsenkungstrog der 3 Kavernen zum Zeitpunkt T.

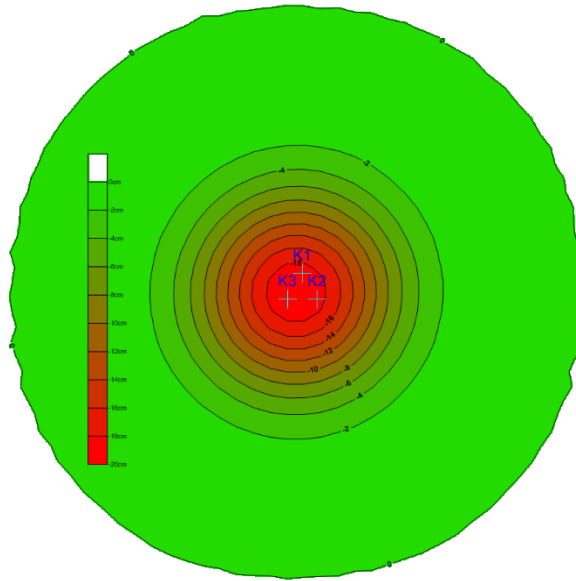


Abbildung 4: vorausberechnete Gesamtsenkung von 3 Modellkavernen

Durch das Ausgleichungsmodell sollen nun durch genäherte Konvergenzvolumen (diese entsprechen im reellen Fall den Gemessenen im Kavernenfeld) und bekannten gemessenen Senkungen an der Tagesoberfläche die Schätzung der Parameter Konvergenz K und Einwirkungsradius R präzisiert werden. Der funktionelle Zusammenhang mit entsprechenden Näherungswerten ist bekannt.

Vorhersagemodell: Zur Berechnung von zu erwartenden Bodenbewegungen über Kavernenfeldern soll folgendes vereinfachtes Vorausberechnungsmodell genutzt werden (siehe Sroka u.a., 2017).

$$S(r) = s_{max} \cdot e^{\left(-\pi \frac{r^2}{R^2}\right)}, \quad 1$$

mit

$$s_{max} = \frac{K}{R^2}, \quad 2$$

$$R = \sqrt{R_0^2 + R_u^2} \quad 3$$

und

$$R = h \cdot \cot\beta. \quad 4$$

Dabei sind

- R - Abstand des Punktes zur Vorausberechnung vom Kavernenzentrum,
- R - Haupteinwirkungsradius der Kaverne,
- R_0 - Haupteinwirkungsradius, berechnet von Kavernendach (in Abhängigkeit vom Haupteinwirkungswinkel β),
- R_u - Haupteinwirkungsradius, berechnet von der Kavernensohle (in Abhängigkeit vom Haupteinwirkungswinkel β),
- K - Hohlraumkonvergenz.

Die Verbesserungsgleichungen für die gemessenen Senkungen sehen wie folgt aus:

$$s_g + v = s_0 + \left(\frac{\delta s}{\delta R}\right)_{R^0} \cdot \hat{R} + \left(\frac{\delta s}{\delta K}\right)_{K^0} \cdot \hat{K} \quad 5$$

s_g : gemessene Senkung, s_0 : genäherte Senkung, v : Verbesserung,

Dabei sind \hat{R} und \hat{K} die unbekannt Parameter, welche durch Anwendung der Ausgleichsrechnung zu lösen sind. Eine Linearisierung der Gleichung ist notwendig und wird nach Tylor bis zum ersten Glied die Reihe entwickelt. Die partiellen Ableitungen mit den Näherungen R_0 und K_0 lauten dann wie folgt:

$$\left(\frac{\delta s}{\delta R}\right)_{R^0} = \frac{2K_0}{R_0^3} \cdot \left(\frac{\pi d^2}{R_0^2} - 1\right) \cdot e^{-\pi \frac{d^2}{R_0^2}} \quad 6$$

und:

$$\left(\frac{\delta s}{\delta K}\right)_{K^0} = \frac{e^{-\pi \frac{d^2}{R_0^2}}}{R_0^2} \quad 7$$

Es wird vereinfacht nach R abgeleitet um entsprechend den Grenzwinkel β nach Formel 4 zu ermitteln. Die direkte Ableitung nach β ist umfangreicher und wird hier nicht aufgeführt.

Ergebnisse eines Beispiels:

Für die Näherungswerte der Konvergenzen K_0 wurden die wahren Konvergenzvolumina um ca. 1 %, aufgrund der möglichen Messungenauigkeit zur Volumenbestimmung, verändert. Ebenso wurde für den Einwirkungswinkel β ein Näherungswert von 30 Grad angenommen. Das künstliche Kavernenfeld wird durch ein virtuelles Höhenfestpunktfeld, in Form eines regelmäßigen Rasters, mit einem konstanten Abstand der Punkte zueinander von 250 m, überzogen.

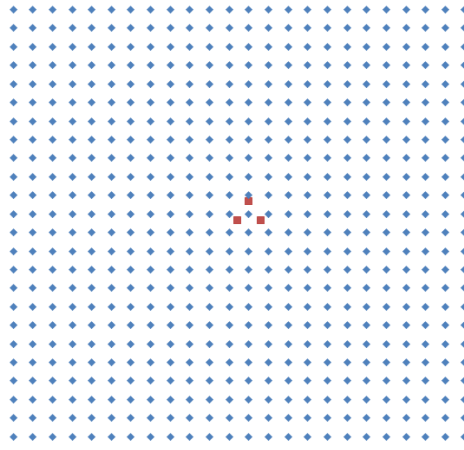


Abbildung 5: konstantes virtuelles Höhenfestpunktnetz

Die Überdeckung des Kavernenfeldes mit Höhenfestpunkten wurde zudem unterschiedlich variiert. Das Festpunktfeld hat bei konstantem Abstand in diesem Beispiel dann 576, 256 und 64 Höhenfestpunkte mit Informationen zu Senkungsbeträgen.

Die Tabelle 4 zeigt die Ergebnisse der Ausgleichsrechnung. Es sind die prozentuelle Abweichung der wahren Werte zu den verbesserten Konvergenzen und Einwirkungswinkeln der drei Kavernen dargestellt. Die Berechnung mit Hilfe der Ausgleichsrechnung nach der Methode kleinster Quadrate wurde ohne Gewichtung und ohne weitere Iterationen durchgeführt. Der hier beschriebene Berechnungsablauf mit dem Modell von 3 Kavernen, kann mit Hilfe bekannter Senkungsinformationen die Parameter einzelner Kavernen berechnen und verbessern. Dies sollte zu präziseren Senkungsvorausberechnungen führen.

Tabelle 4: Ergebnisse der Parameterschätzung durch Ausgleichsrechnung

Anzahl Festpunkte	dK1	dK2	dK3	d β 1	d β 2	d β 3
576	0,07%	-0,21%	0,29%	-0,19%	-0,06%	-0,29%
256	0,17%	-0,19%	0,24%	-0,23%	-0,10%	-0,26%
64	1,25%	0,19%	-0,02%	-0,23%	-0,08%	-0,26%

3 Parameterschätzung durch Bayes'schen Ansatz und der Monte-Carlo Methode

3.1 Grundlagen

Im Folgenden sollen Begrifflichkeiten Modell, Daten und Informationsgehalt des Modells und der Daten im Bayes'schen Sinne erläutert werden.

Modell: Im Allgemeinen ist die Wahl der Modellparameter nicht eindeutig. Je nach gewünschter Komplexität oder spezifischem Anwendungsfall existieren oftmals mehrere alternative Modellansätze, z.B. verschiedene Einflussfunktionen in der Bodenbewegungsvorausberechnung. Eine spezifische Wahl von Parametern wird Parametrisierung genannt. Für diesen existiert ein *Raum möglicher Parameter oder Parameterraum M* . Dieser beschreibt, welche Größenordnung die verschiede-

nen Parameter annehmen können (Abbildung 6a). Um ein Modell für eine quantitative Abschätzung zu nutzen, gilt es den „besten“ Satz an Parametern zu finden. Dieser entspricht einem Punkt \mathbf{m} in dem Raum mit den Koordinaten $\mathbf{m} = \{ m_1, m_2, \dots, m_\alpha \}$. \mathbf{m} ist der Parametervektor.

Daten: Daten resultieren aus Beobachtungen an messbaren Parametern des Systems. Im Falle der Bodenbewegungen sind das Senkungsbeobachtungen an Höhenpunkten eines Nivellementnetzes. Der Datenraum (Abbildung 6b) faßt alle möglichen Messergebnisse zusammen. Ein spezifisches Messergebnis entspricht einem Punkt im *Datenraum* \mathbf{D} . Die Koordinaten dieses Raumes entsprechen den verschiedenen messbaren Größen, z.B. den einzelnen gemessenen Höhenunterschieden an den Messpunkten $\mathbf{d} = \{ d_1, d_2, \dots, d_n \}$. \mathbf{d} ist der Datenvektor.

Gemeinsamer Raum der Modellparameter und Daten: Der gemeinsame Raum von Modellparametern und Daten wird im Folgenden als \mathbf{X} bezeichnet, wobei $\mathbf{x} = \{ m_1, m_2, \dots, m_\alpha, d_1, d_2, \dots, d_n \}$ sowohl die Modellparameter und auch die Daten enthält. Ein Punkt in diesem Raum entspricht einer konkreten Parametrisierung sowie dazugehörige Beobachtungen im System.

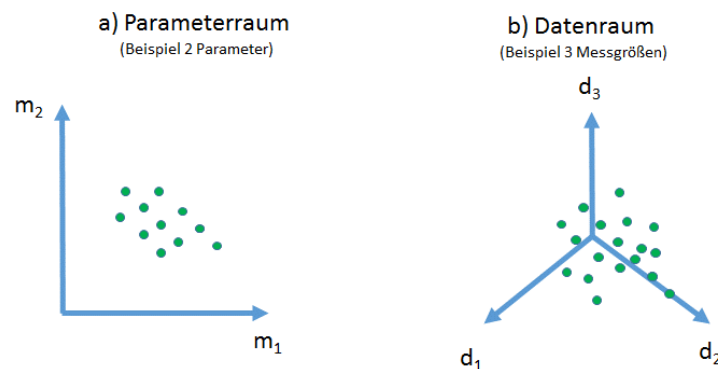


Abbildung 6: Datenraum und Parameterraum

Informationsgehalt der Modellparameter und der Daten:

Der Wissensstand oder Informationsgehalt über Parameter und Daten kann durch Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. Jedem Punkt im Daten- oder Parameterraum kann eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden, bzw. für einen bestimmten Parameter m_i oder einen bestimmten Messwert d_j kann eine Wahrscheinlichkeitsdichte angegeben werden. Letzteres kann beispielsweise durch eine Normalverteilung erfolgen, deren Mittelwert dem Messwert und der Varianz der Messvarianz entspricht. Für den einzelnen Parameter können a priori Vorkenntnisse genutzt werden, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Näherungswert zum Parameter sowie der dazugehörigen Unsicherheit zu charakterisieren. Einem Punkt im gemeinsamen Raum \mathbf{x}_k kann ebenfalls eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Diese beschreibt die gemeinsame Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer bestimmten Parametrisierung m_i mit bestimmten Messergebnissen d_j . Abbildung 7 fasst Modellraum, Datenraum und dazugehörige Wahrscheinlichkeiten zusammen.

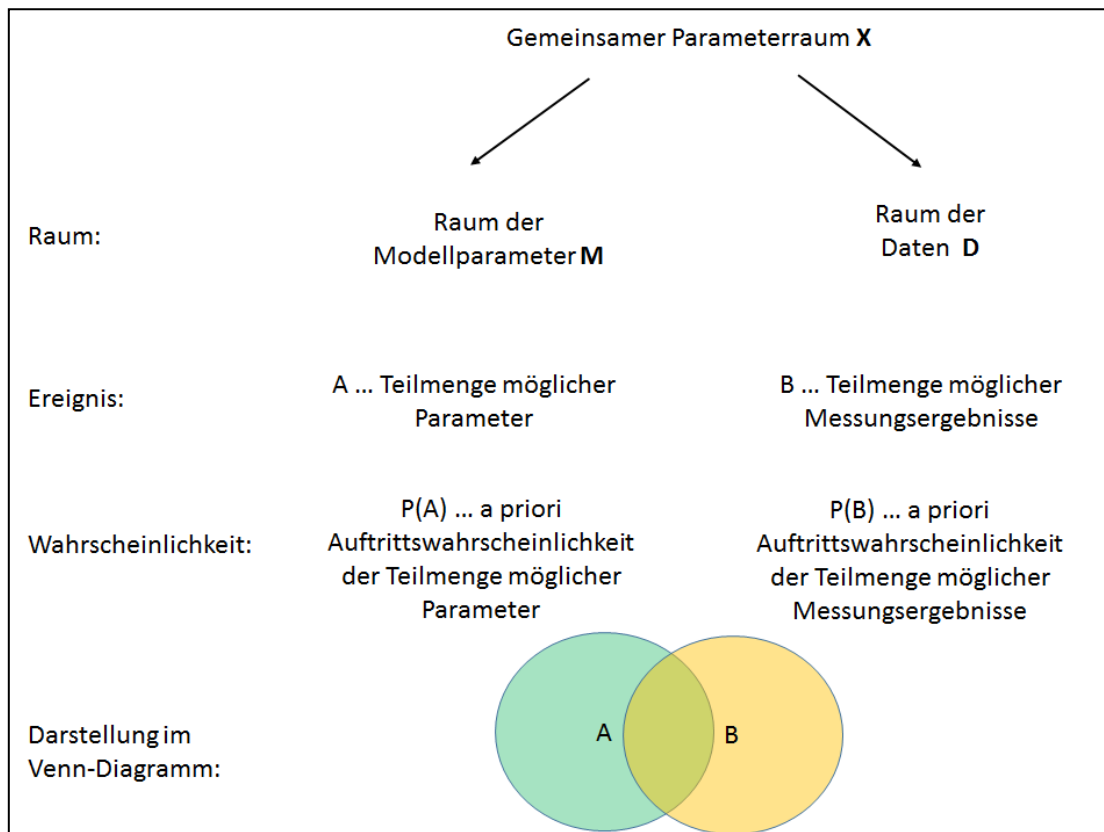


Abbildung 7: Zugang zur Parameterschätzung über Wahrscheinlichkeiten

Mit diesen Modellüberlegungen lassen sich die Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie anwenden. Von grundlegender Bedeutung in der Parameterschätzung ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad 8$$

Diese gibt die Wahrscheinlichkeit der Modellparameter A unter Einbeziehung bekannter Messungsergebnisse B an. In anderen Worten, unter Kenntnis gemessener Höhendifferenzen im Senkungsgebiet kann so die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens bestimmter Modellparameter A ermittelt werden. Eine Erweiterung der bedingten Wahrscheinlichkeit ist die Bayes-Formel. Aus Gleichung (8) kann folgende Beziehung abgeleitet werden

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B). \quad 9$$

Ebenfalls gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad 10$$

Durch Gleichsetzen von (9) und (10) folgt die Bayes'sche Beziehung zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \quad 11$$

Dabei ist $P(B|A)$ die sogenannte Likelihood der Daten. Diese nimmt eine zentrale Rolle ein und beschreibt, wie wahrscheinlich konkret die Messungsergebnisse sind, wenn ein bestimmter Parametersatz angenommen wird. Diese Likelihood beschreibt gewissermaßen die Passfähigkeit der Daten zu einem bestimmten Parametersatz. Passen die Messungen gut zu Modellparametern, ist die Likelihood hoch. Formel (11) ist letztendlich die, die gelöst werden muss, um eine a posteriori Abschätzung der besten Modellparameter tätigen zu können.

Vorwärtsoperator:

Idealerweise existiert ein fehlerfreies Vorwärtsmodell G , welches Modellparameter \mathbf{m} eindeutig in Messungsergebnisse \mathbf{d} überführt

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{d} = G(\mathbf{m}). \quad 12$$

$G(\mathbf{m})$ kann beispielsweise ein nichtlineares Gleichungssystem darstellen. Im vorliegenden Fall übernehmen die Formalismen zur Vorausberechnung von Bodenbewegungen (siehe Formel 1 bis 4) die Funktion des Vorwärtsoperators. Generell können aufgrund von imperfekten Modellen sowie Messunsicherheiten modellbasierte Vorhersagen nicht den Messungsergebnissen entsprechen. Damit empfiehlt es sich, den fehlerfreien Vorwärtsoperator durch eine probabilistische Korrelation zwischen \mathbf{d} und \mathbf{m} zu ersetzen

$$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}). \quad 13$$

Diese ist eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung, die das gemeinsame Auftreten bestimmter Modellparameter und Messungsergebnisse beschreibt. Für die Annahme normalverteilter Parameter und Messungsergebnisse kann $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ diese wie folgt ausgedrückt werden

$$\theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \text{const} \cdot e^{(-1/2((\mathbf{d}-G\mathbf{m})^T C_{DD}^{-1}(\mathbf{d}-G\mathbf{m}))}. \quad 14$$

Formel 14 quantifiziert die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Differenzen zwischen modellbasierter Vorhersage $G\mathbf{m}$ und Messungsergebnis \mathbf{d} mit der entsprechenden Varianz-Kovarianzmatrix C_{DD} . Dabei ist $G\mathbf{m}$ ein linearer Vorwärtsoperator.

Beziehung 14 kann genutzt werden, um für jeden möglichen Modellparametersatz \mathbf{m} die oben (Formel 4) beschriebenen Likelihood der Daten zu berechnen.

3.2 Lösungsstrategie unter Nutzung der Monte Carlo-Simulation

Formel (11) ist der Ausgangspunkt zur Aktualisierung von Modellparametern unter Nutzung von Messungsergebnissen

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \quad 11$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Daten $P(B)$ ist in der Regel durch Messungsergebnis und Standardabweichung der Messung bekannt und unabhängig von der Likelihood $P(B|A)$ und der a priori Wahrscheinlichkeit der Parameter $P(A)$. Sie kann für die weitere Lösung als konstant gesetzt werden. Damit ergibt sich (11) als

$$P(A|B) \propto P(B|A) \cdot P(A). \quad 15$$

wobei \propto die Proportionalität ausdrückt. $P(B|A)$ kann im Falle der Normalverteilung durch Beziehung (15) ermittelt werden. $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der a priori Modellparameter.

Wird eine a priori, also Näherungsverteilung, der Modellparameter angenommen, beispielsweise eine Normalverteilung mit Näherungsmittelwert und Unsicherheit, so kann unter Nutzung eines Zufallszahlengenerators ein möglicher Parametersatz gewissermaßen ausgewürfelt werden. Wird dieser Vorgang oft wiederholt, so beschreibt das Histogramm dieser so simulierten Werte die a priori Verteilung durch diskrete Proben. Jede einzelne Probe ist gleichwahrscheinliche im Auftreten nämlich $1/n$, wobei n die Anzahl der simulierten Modellparameter ist.

Für jeden einzelnen zufällig erzeugten Parametersatz kann unter Nutzung von Beziehung (11) die Likelihood berechnet werden, d.h. die Passfähigkeit der Daten zu den entsprechenden Modellparametern. Passen Parameter gut zu den Messungen, so hat die Likelihood einen großen Wert. Beziehung (14) gewichtet das entsprechend bei der Berechnung der aktualisierten a posteriori Verteilung. Bei n maliger Wiederholung werden die Wahrscheinlichkeiten der simulierten Parameter aktualisiert. Diese können in der a posteriori Verteilung zusammengefasst werden. Daraus lassen sich Mittelwert und Standardabweichungen ableiten, die einen besten Schätzer unter Nutzung der verfügbar stehenden Informationen darstellen.

Vergleich zur vermittelnden Ausgleichung: Die Likelihood-Funktion (11) nimmt bei der Berechnung der besten Modellparameter eine zentrale Rolle ein. Optimal sind die Modellparameter, die diese Funktion maximieren. Das Maximieren kommt einher mit der Minimierung des mit negativem Vorzeichen behafteten Exponenten der e-Funktion. Der zu minimierende Term beschreibt die Summe der mit der Varianz-Kovarianzmatrix gewichteten Verbesserungsquadrate (gemessen – gerechnet). Der Monte-Carlo-Ansatz sucht gewissermaßen empirisch den Parametersatz, der die Summe der gewichteten Verbesserungsquadrate minimiert, analog zur Ausgleichungsrechnung. Dabei werden zufällig eine große Anzahl Parametersätze auf Optimalität untersucht. Die Vorteile des Bayes'schen Monte-Carlo-Ansatzes gegenüber der Ausgleichungsrechnung sind:

- Die Vorkenntnis der Modellparameter und deren Unsicherheit kann durch eine a priori Verteilungsfunktion charakterisiert werden. Diese kann beliebig gewählt werden.
- Es wird keine explizite inverse Funktion des Vorwärtsmodells benötigt. Das heißt auch, dass keine Linearisierung notwendig ist. Das Vorwärtsmodell kann nichtlinear, sehr komplex und auch numerisch sein.

Mit der heute verfügbaren Rechenleistung stellt dieses Vorgehen eine ernsthafte Alternative zur klassischen Ausgleichungsrechnung dar.

3.3 Anwendung auf die Parameterschätzung zur Vorausberechnung von Bodenbewegungen über Speicherkavernen

Vorhersagemodell: Zur Berechnung von zu erwartenden Bodenbewegungen über Kavernenfeldern soll folgendes vereinfachtes Vorausberechnungsmodell genutzt werden (siehe Formel 1 bis 4).

Aus Senkungsmessungen sollen beste Schätzer für die Parameter Konvergenz K und den Haupteinwirkungswinkel β ermittelt werden. Bei Bedarf kann dieses Modell auf weitere Parameter, z.B. Absenkungsfaktor a , zeitliches Verhalten der Hohlraumkonvergenz, zeitliches Verhalten der Übertragung der Konvergenz durch das Deckgebirge, erweitert werden. Zu Illustrationszwecken soll es hier bei den beiden genannten Parametern bleiben.

A priori Kenntnisse zu Modellparametern:

A priori sollen zu Hohlraumkonvergenz K und Haupteinwirkungswinkel β folgende Informationen bekannt sein:

- Näherungswert der Konvergenz K_0 und Unsicherheit u_{K0} ausgedrückt durch die Standardabweichung und
- Näherungswert Konvergenz β_0 und Unsicherheit u_{β_0} .

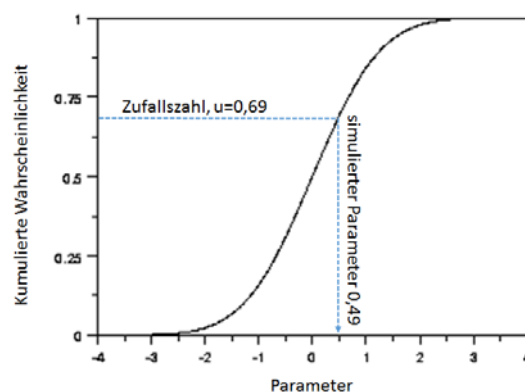
Für beide Parameter soll die Normalverteilung angenommen werden. Liegen Kenntnisse zum Verhalten der Unsicherheit vor, so kann jede beliebige Verteilung, z.B. die Weibullverteilung oder eine Gleichverteilung zwischen einem Minimum und Maximum gewählt werden.

Messdaten:

An Höhenfestpunkten mit dem Abstand r vom Kavernenzentrum sind Senkungsmessungen $s(r)$ durchgeführt worden. Diese sind durch eine Höhenänderung und der entsprechenden Standardabweichung in der Höhenangabe charakterisiert.

Algorithmus:

1. Für ein Kavernenfeld werden unter Nutzung von Zufallszahlen für jede Kaverne Modellparameter K und β simuliert. Dazu wird eine gleichverteilte Zufallsfunktion zwischen 0 und 1 erzeugt und unter Nutzung der a – priori Verteilung der entsprechende simulierte Modellparameter ermittelt.



2. Unter Nutzung der Beziehung (1) und der eben simulierten Modellparameter werden für alle gemessenen Höhenfestpunkte modellbasierte Vorhersagen der Senkung ermittelt.
3. Für jeden Messpunkt werden Differenzen zwischen Messwert und modellbasierter Vorhersage ermittelt.
4. Unter Nutzung der Beziehung (11) wird die Likelihood der Messdaten bezüglich der unter (1) simulierten Modellparameter berechnet.
5. Die a posteriori Wahrscheinlichkeit der unter Schritt 1 simulierten Probe (welche $1/n$ ist) kann unter Einbeziehung der berechneten Likelihood und entsprechend der Formel (14) aktualisiert werden.

Schritte 1 bis 5 werden n mal durchgeführt. Die Anzahl der Simulationsdurchläufe hängt von der Komplexität der zu lösenden Aufgabenstellung ab. Zur Berechnung einer Superpositionslösung von drei Kavernen hat sich beispielsweise in Untersuchungen eine Größenordnung von 10.000 für günstig erachtet. Die Laufzeit des Algorithmus ist in der Regel kleiner als 1 bis 2 Minuten.

Aus den simulierten Parametern mit aktualisierten a posteriori Genauigkeiten kann eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung der Parameter berechnet werden. Der Mittelwert dieser ist eine Approximation des besten Schätzers. Die Varianz bzw. Standardabweichung liefert ein Maß für die Restunsicherheit.

Zum effizienteren „explorieren“ des gesamten möglichen Parameterraums existieren moderne Algorithmen, die vielversprechend sind, schnell konvergieren, d.h. in relativ wenigen Iterationsschritten zur optimalen Lösung zu gelangen. Zu nennen sind hier der „Metropolis – Hasting Algorithmus“ oder die sogenannte „Gradient-Descent-Methode“ (z.B. Gosavi, 2015). Es ist vorgesehen, diese in zukünftigen Forschungsarbeiten näher zu untersuchen.

Ergebnisse:

Analog zur Fallstudie um Kapitel 2 erfolgte eine Parameterschätzung unter Nutzung des eben ausgeführten Ansatzes. Tabelle 5 fasst die Ergebnisse ähnlich zur Tabelle 2 zusammen. Es kann festgestellt werden, dass beide Ansätze ähnlich gut schätzen. Restunsicherheiten sind bedingt durch Messfehler in der Höhenbestimmung. Ebenso wie in der Ausgleichung, wird eine signifikante Verbesserung der Schätzung aller Parameter erreicht. Die Größenordnung der Verbesserung entspricht der des Ausgleichungsansatzes.

Tabelle 5: Ergebnisse der Parameterschätzung mit Bayes'schen Ansatz

Anzahl Festpunkte	dK1	dK2	dK3	d β 1	d β 2	d β 3
576	-0,12%	-0,18%	0,27%	-0,32%	-0,4%	-0,45%

4 Zusammenfassung

Im Vortrag wurden zwei alternative Methoden zur Parameterschätzung für im Kontext einer synthetischen Studie zur Bodenbewegungsvoraussberechnung über Kavernenfeldern gegenübergestellt. Beide Verfahren sind in der Lage, aus Messungen im Höhenfestpunktnetz die Genauigkeit der Modellparameter Konvergenz und Einwirkungswinkel zu steigern. Die erreichte Genauigkeit übersteigt dabei erreichbare Messgenauigkeiten zur direkten Bestimmung der Hohlraumkonvergenz. Es ist

davon auszugehen, dass die Nutzung derartig bestimmter Parameter zu besseren Modellschätzungen führen.

Im Vergleich schneiden beide Verfahren zur Parameterschätzung gleichgut ab. Dieser Vergleich zeigt damit auch das Potential der Bayes'schen Methode auf, die im Vergleich zur Ausgleichsrechnung zwei wesentliche Vorteile hat. Ersten kann eine a priori Verteilung der Parameter spezifiziert werden und damit auch Vorkenntnisse über Parameter in die Modellrechnung mit einbezogen werden. Zweitens benötigt dieser Ansatz keine Linearisierung. Das vereinfacht das Verfahren. Unter Nutzung der heutigen Rechenleistung stellt diese Methode damit eine ernsthafte Alternative zur Ausgleichsrechnung dar.

In der weiterführenden Forschungsarbeit sollen beide Methoden unter Nutzung alternativer Gewichtsansätze sowie Optimierungsalgorithmen für den Bays'schen Ansatz verfeinert werden. Weiterhin sind Simulationsstudien zur Messnetzoptimierung vorgesehen. Aufgrund des zum Vollflächenradius relativ geringen Abstandes der Kavernenachsen und der damit einhergehenden großflächigen Superposition ergeben sich aus Sicht der Parameterschätzung alternative optimale Messnetzgeometrien. Eine weitere Herausforderung dabei ist die Anzahl der sich überlagernden Senkungströge der Kavernen bei großen Kavernenfeldern. Diese Themen sind Gegenstand einer aktuell laufenden Dissertation.

REFERENZEN

Gosavi, A. (2015): Simulation-based optimization. Berlin: Springer.

Leitzke, C., Sroka, A. (1987): Indirekte Überwachung unzugänglicher Speicher- und Deponiekavernen. Kali und Steinsalz, Bd. 9, Heft 10.

Sroka, A., Misa, R., Tajduś, K. Klaus, M, Stefan M, and Bernd Feldhaus, B., (2017): Forecast of rock mass and ground surface movements caused by the convergence of salt caverns for storage of liquid and gaseous energy carriers. In Benndorf, J. (ed.), Proceedings of the 18. Geokinematischer Tag, Freiberg pp.:34-51.

Tarantola, A (2005): Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Vol. 89. siam, 2005.

Sroka, A., Schober, F. (1982): Die Berechnung der maximalen Bodenbewegung über kavernenartigen Hohlräumen unter Berücksichtigung der Hohlraumgeometrie“, Kali und Steinsalz, August 1982.